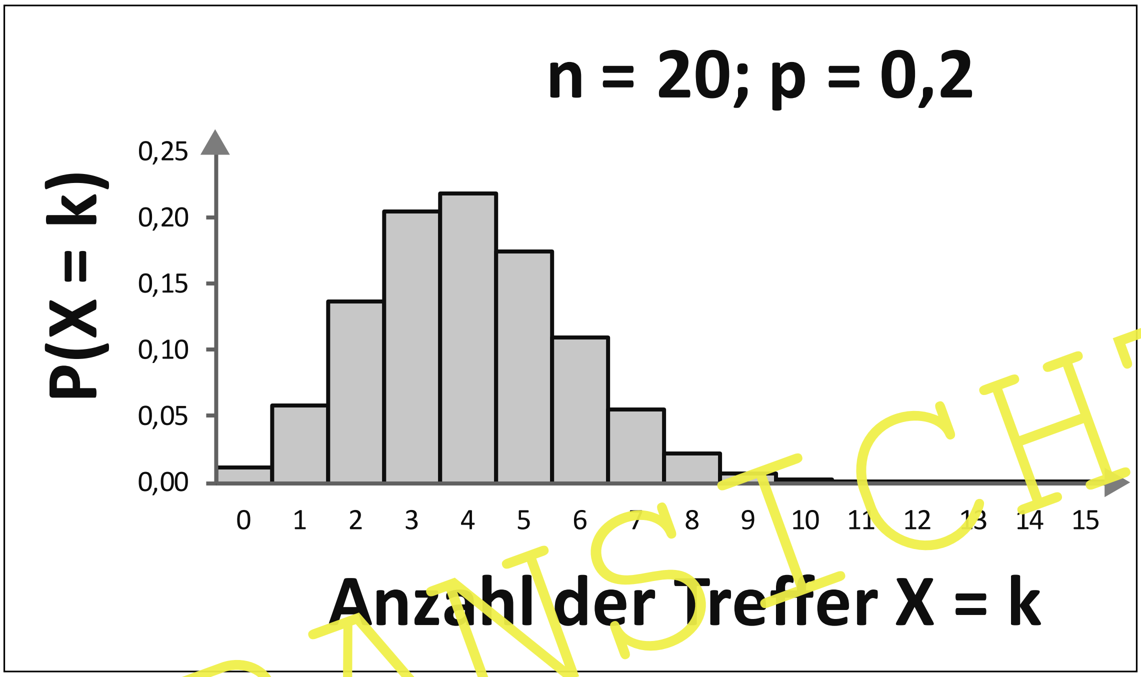
Vokabeltest Slowenisch – auf dem Weg zur Binomialverteilung

Walter Czech, Krumbach



Typische Binomialverteilung (n = 20; p = 0,2)

Klasse: 12

Dauer: 4–8 Stunden

Inhalt: Herleitung der Formel zur Berechnung der Binomialverteilung: vom Baumdiagramm über eine Tabelle und Kombinatorik zur Formel

Vertiefung und Anwendungsaufgaben

Ihr Plus:

✓ Vokabeltest Slowenisch – ein origineller Aufhänger

✓ Schrittweise und daher leicht nachvollziehbare Herleitung der Formel für die Binomialverteilung

✓ Geeignet zur Vorbereitung auf die Abiturprüfung

Mit einem Vokabeltest Slowenisch (Multiple-Choice-Test) gewinnen Sie das Interesse Ihrer Schüler. Der Unterricht in Stochastik fordert gedankliche Schritte von den Lernenden, die für sie ungewohnt sind. Um ihnen dennoch den Einstieg in dieses interessante Gebiet zu ermöglichen, erfolgt die Herleitung der Formel für die Binomialverteilung schrittweise. Jeder Ihrer Schüler sollte die einzelnen Überlegungen nachvollziehen können. Mit zahlreichen Anwendungsaufgaben vertiefen Ihre Schüler das Gelernte und erschließen sich so ein Gebiet, das Relevanz für die Abiturprüfung hat.

Didaktisch-methodische Hinweise

Zufällige Ereignisse und Entwicklungen begegnen Ihren Schülern tagtäglich. Es dürfte jedoch für viele Schüler überraschend und daher interessant sein, zu erfahren, dass es Methoden und Verfahren gibt, auch für solche Ereignisse und Entwicklungen einigermaßen zuverlässige **Prognosen** zu erstellen.

Eines der bekanntesten Beispiele ist der **Wetterbericht**, der für eine kürzere Zeitspanne (in der Regel drei Tage) sehr zuverlässige Aussagen bezüglich der Sonnenscheindauer, der Entwicklung der Temperatur, des Niederschlags oder der Windstärke macht. Auch andere Prognosen, wie zum Beispiel die **Entwicklung des Wirtschaftswachstums**, der **Beschäftigungsrate** oder der **Lebenserwartung** sind für unsere Gesellschaft von Bedeutung. Dass diese Prognosen nicht immer so eintreffen, liegt unter anderem an dem jeweils zugrunde liegenden mathematischen Modell.

Die **Binomialverteilung** ist die wichtigste **elementare Verteilung der Stochastik**. Die Zufallsgröße „Anzahl der Treffer" beim **„Ziehen mit Zurücklegen"** ist binomialverteilt. Da man zahlreiche Experimente auf das Ziehen mit Zurücklegen zurückführen kann, ist diese Zufallsgröße gewissermaßen der Prototyp einer binomialverteilten Zufallsgröße. Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt die von **Jakob Bernoulli** (1655–1705) hergeleitete Formel.

Vorbereitung – damit alles gelingt

Kopieren Sie die Materialien **M 1**–**M 6** in Klassenstärke. Verteilen Sie zunächst **M 1** und teilen Sie Ihrer Lerngruppe mit, dass es um einen Multiple-Choice-Test zu Vokabeln in Slowenisch geht. In der Regel sollte es in Ihrer Lerngruppe keinen Schüler geben, der diese Sprache beherrscht. Andernfalls nimmt dieser Schüler an diesem Test nicht teil. Ein Schüler hat den Test bestanden, wenn er mindestens 50 % aller Fragen richtig beantwortet hat. Das Ergebnis des Tests wird ermittelt und festgehalten. Danach wird das Ganze schrittweise mathematisch analysiert. Dazu lesen die Schüler eigenverantwortlich Material **M 2** und beschäftigen sich mit Material **M 3**. Erst wenn Material **M 3** vollständig bearbeitet ist, teilen Sie das Lösungsblatt zu Material **M 3** aus. Und so verfahren Sie auch mit den folgenden Materialien **M 4–M 6**. Wenn ein Schüler gar nicht zurechtkommt, helfen Sie mit einem entsprechenden Tipp weiter. Zur weiteren Vertiefung bieten sich die gruppenweise Bearbeitung der Materialien **M 7–M 11** im Unterricht bzw. als Hausaufgabe an. Mit der Lernerfolgskontrolle (**M 12**) schließen Sie die Unterrichtseinheit ab.

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler …	Anforderungsbereich
K 1	L 5	… erleben mit einem Vokabeltest einen experimentellen Einstieg in das Thema „Binomialverteilung" (**M 1**),	I, II
K 1, K 2	L 4	… wenden Grundkenntnisse aus der Kombinatorik an (**M 4, M 7–M 12**),	II, III
K 1, K 2, K 5	L 4	… wenden die Formel für die Binomialverteilung an (**M 6**),	II, III
K 1–K 5	L 1, L 4	… festigen ihr stochastisches Können (**M 7–M 12**).	I–III

Für welche Kompetenzen und Anforderungsbereiche die Abkürzungen stehen, finden Sie auf beiliegender CD-ROM 65.

Auf einen Blick

Schrittweise Herleitung der Formel für die Binomialverteilung

Material	Thema	Stunde
Einstieg M 1	**Vokabeltest Slowenisch – ein Anwendungsbeispiel** Anhand eines Multiple-Choice-Tests anwendungsorientiert in das Thema „Binomialverteilung“ einsteigen; zu 10 deutschen Wörtern die Übersetzung ins Slowenische suchen	1.
M 2	**Mathematische Analyse des Vokabeltests** Definition des Bernoulli-Experiments; Einführung der Binomialkoeffizienten; Einführung einer binomialverteilten Zufallsgröße; Übersicht über das Vorgehen zur schrittweisen Herleitung der Formel für die Binomialverteilung	2./3.
M 3	**Analyse des Vokabeltests: das Baumdiagramm** Wahrscheinlichkeit bei vier Multiple-Choice-Blöcken mit jeweils drei Ankreuzmöglichkeiten; Lösung mithilfe eines Baumdiagramms; Farbstifte benutzen!	
M 4	**Wahrscheinlichkeit bei fünf Multiple-Choice-Blöcken** Wahrscheinlichkeit bei fünf Multiple-Choice-Blöcken mit jeweils drei Ankreuzmöglichkeiten; Lösung mithilfe einer Tabelle und kombinatorischer Überlegungen	
M 5	**Weiter geht's mit k Treffern – Verallgemeinerung** Verallgemeinerung der bisherigen Überlegungen	4./5.
M 6	**Die Wahrscheinlichkeit beim Vokabeltest Slowenisch** Lösung der Einstiegsaufgabe mithilfe der Formel für die Binomialverteilung	

Vertiefung mithilfe von Anwendungsaufgaben (6.–8. Stunde)

Material	Thema
M 7	**Die Bernoulli-Kette** Definition der Bernoulli-Kette; Anwendung auf ein Würfelexperiment
M 8	**Das Urnenexperiment** Einführung des Standardmodells „Urne“ für das Ziehen mit Zurücklegen
M 9	**Das Glücksspiel** Würfelexperiment mit drei Würfeln
M 10	**Eine Sportschützin** Anwendungsaufgabe zur Binomialverteilung
M 11	**Eine Eignungsprüfung** Anwendungsaufgabe zur Binomialverteilung
M 12 (LEK)	**Kreuz und quer – den Lernerfolg feststellen** Den Lernerfolg an Anwendungsaufgaben überprüfen

Minimalplan

Beschränken Sie sich auf die Herleitung der Formel für die Binomialverteilung (**M 1–M 6**).

M 1 Vokabeltest Slowenisch – ein Anwendungsbeispiel

Die nächste Studienfahrt geht nach Slowenien. Höchste Zeit, dass Sie die Sprache lernen!

Ljubljana, Slowenien

Aufgabe

Suchen Sie für jedes deutsche Wort die Übersetzung ins Slowenische. Kreuzen Sie diese unter den angegebenen Möglichkeiten an. Wenn Sie mindestens 50 % der Fragen richtig beantwortet haben, ist der Test bestanden.

1. **lachen** heißt ☐ spati ☐ smejati ☐ hoditi	5. **Fisch** heißt ☐ rak ☐ riba ☐ školjka	9. **Löffel** heißt ☐ nož ☐ žlica ☐ vilice
2. **Insel** heißt ☐ hiša ☐ morje ☐ otok	6. **Rucksack** heißt ☐ perilo ☐ hlače ☐ nahrbtnik	10. **Zelt** heißt ☐ šotor ☐ okno ☐ postelja
3. **reden** heißt ☐ govoriti ☐ plavati ☐ jesti	7. **lieben** heißt ☐ iskati ☐ ljubiti ☐ citrati	
4. **Kartoffel** heißt ☐ čebula ☐ paradižnik ☐ krompir	8. **Lüge** heißt ☐ laž ☐ miza ☐ stol	

✂ -

Lösung zum Vokabeltest Slowenisch (M 1)

Deutsch	Slowenisch	Deutsch	Slowenisch
1. **lachen**	smejati	6. **Rucksack**	nahrbtnik
2. **Insel**	otok	7. **lieben**	ljubiti
3. **reden**	govoriti	8. **Lüge**	laž
4. **Kartoffel**	krompir	9. **Löffel**	žlica
5. **Fisch**	riba	10. **Zelt**	šotor

Vgl. http://de.pons.com/übersetzung

M 2 Mathematische Analyse des Vokabeltests

Zur Wiederholung

Der Vokabeltest ist ein Zufallsexperiment mit zwei Ausgängen:

Vokabel richtig (Erfolg/Treffer) oder Vokabel falsch (Misserfolg/Niete).

Solche Zufallsexperimente heißen **Bernoulli-Experimente**. Führt man ein Bernoulli-Experiment n-mal unter gleichen Rahmenbedingungen durch, so erhält man eine **Bernoulli-Kette der Länge n**. Für eine Bernoulli-Kette der Länge n ($n \in \mathbb{N}$) mit der Trefferwahrscheinlichkeit p gilt:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Dabei gibt die Zufallsgröße X die Anzahl der Treffer k mit $k \leq n$ an.

$\binom{n}{k}$ heißen **Binomialkoeffizienten**. Man sagt: Die Zufallsgröße X ist **binomialverteilt**.

Das Vorgehen auf einen Blick

Wie kommt man zu dieser Formel? Wir machen uns das schrittweise klar:

1. Schritt Wir führen in Gedanken einen Vokabeltest mit nur **vier Multiple-Choice-Blöcken mit jeweils drei Ankreuzmöglichkeiten** durch. Diesen Fall können wir mit dem vertrauten **Baumdiagramm** anschaulich bearbeiten und lösen.

Beispiel:

$$P(X = 2) = 6\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 \approx 0{,}296$$

2. Schritt Wir erhöhen die Anzahl der Multiple-Choice-Blöcke auf **fünf**. Das Baumdiagramm hätte nun 16 • 2 = **32 Pfade**. Wir suchen nach einer anderen Möglichkeit, die Anzahl der verschiedenen Ereignisse rechnerisch zu bestimmen. Die Kombinatorik hilft uns.

Ergebnis:

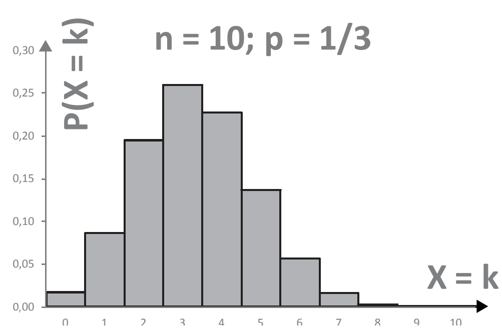
$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \binom{5}{3} = 10 \text{ Möglichkeiten}$$

3. Schritt Wir finden mit dem Ergebnis aus dem 2. Schritt die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ mit $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

4. Schritt Wir verallgemeinern und erhalten als Formel für die Binomialverteilung:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Rechts ist eine typische Binomialverteilung abgebildet.



Typische Binomialverteilung (n = 10; p = 1/3)

M 3 Analyse des Vokabeltests: das Baumdiagramm

1. Schritt

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter vier Multiple-Choice-Blöcken ($\triangleq$ nur 4 Vokabeln erraten) mit jeweils drei Ankreuzmöglichkeiten keine Vokabel, genau eine, genau zwei, genau drei oder genau vier Vokabeln richtig zu erraten?

Wir lösen das Problem mithilfe eines **Baumdiagramms**. Die Abbildung zeigt die Struktur eines solchen Baumdiagramms.

Aufgabe

a) Beschriften Sie die Verzweigungspunkte mit r bzw. f.

b) Dabei gilt (Ergänzen Sie!):

p(Vokabel richtig geraten)

= p(r) = ________

p(Vokabel falsch geraten)

= p(f) = ________

Die Zufallsvariable X = k zählt, wie oft die Vokabel richtig geraten wird.

Ergebnis:

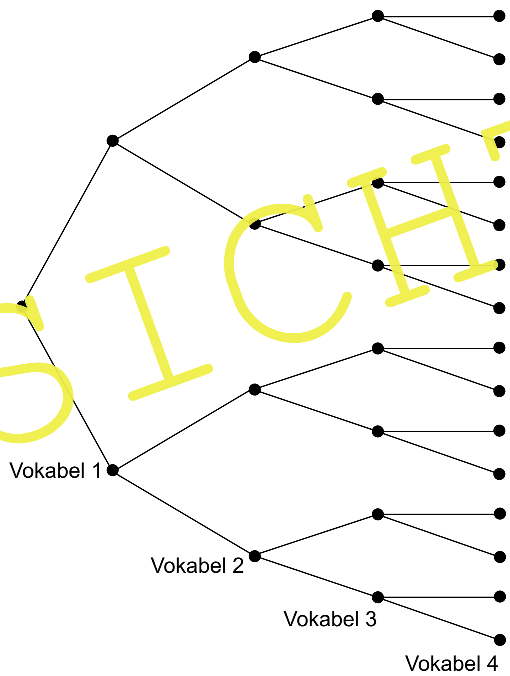
P(X = 0) = ________

P(X = 1) = ________

P(X = 2) = ________

P(X = 3) = ________

P(X = 4) = ________



Lösung zu M 3: Aus dem ausgefüllten Baumdiagramm lesen wir die verschiedenen Ereignisse ab und erhalten als Wahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse:

Ereignis	Häufigkeit	Kombinationen	Wahrscheinlichkeit
4 r	1-mal	r r r r	$P(X=4)=\left(\frac{1}{3}\right)^4 \approx 0{,}012$;
3 r, 1 f	4-mal	r r r f; r r f r; r f r r; f r r r	$P(X=3)=4\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0{,}099$
2 r, 2 f	6-mal	r r f f; r f r f; f r r f; r f f r; f r f r; f f r r	$P(X=2)=6\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 \approx 0{,}296$;
1 r, 3 f	4-mal	r f f f; f r f f; f f r f; f f f r	$P(X=1)=4\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 0{,}395$
4 f	1-mal	f f f f	$P(X=0)=\left(\frac{2}{3}\right)^4 \approx 0{,}198$

Merke: Die Summe der Wahrscheinlichkeiten ist immer gleich 1.

II/C

M 4 Fünf Multiple-Choice-Blöcke (Fortsetzung) – Kombinatorik hilft weiter!

Die Anzahl 10 ergibt sich auch aus folgender Überlegung: Das erste x kann auf die „Stellen" 1, 2, 3, 4 und 5 verteilt werden, für das zweite x verbleiben noch 4 Stellen und für das dritte x noch drei. Also gibt es anscheinend insgesamt

5 • 4 • 3 = 60 Möglichkeiten, drei x auf fünf Stellen zu verteilen.

Aufgabe: 60 ist ungleich 10. Was haben wir übersehen?

Nun, hätten wir ein Baumdiagramm benutzt und würden wir x jeweils unterschiedlich schreiben, nämlich als x_1, x_2, x_3 (für „Vokabel 1 richtig", „Vokabel 2 richtig" bzw. „Vokabel 3 richtig", allgemein „Vokabel n richtig" für $n \le 5$), dann erkennen wir zum Beispiel:

$x_1\ x_2\ x_3$,
$x_2\ x_1\ x_3$,
$x_2\ x_3\ x_1$,
$x_1\ x_3\ x_2$,
$x_3\ x_2\ x_1$,
$x_3\ x_1\ x_2$

stellen dasselbe Ereignis in der 1. Zeile unserer Tabelle dar. Das trifft auf jede der Zeilen in der Tabelle zu.

Also müssen wir 5 • 4 • 3 durch 6 = 3 • 2 • 1 = 3! dividieren.

Statt $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}$ verwendet man die Schreibweise $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)}$.

Tipp

Wenn Sie die Binomialkoeffizienten

$\binom{n}{k}$

ausrechnen, erkennen Sie, dass sich diese zu dem rechts abgebildeten Schema anordnen lassen.

Dieses Schema heißt nach Blaise Pascal (1623–1662), einem berühmten Mathematiker, das

Pascal'sche Dreieck.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

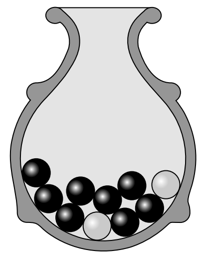
Tipp

Zur direkten Berechnung der Binomialkoeffizienten bieten viele Taschenrechner eine Tastenkombination an. Zum Beispiel erhält man $\binom{20}{4}$ bei einigen Taschenrechnern mit der Tastenfolge

20	nCr	4

M 8 Vertiefung: das Urnenexperiment

Aufgaben: In einer Urne befinden sich 10 gleichartige Kugeln. Davon sind 8 schwarz und 2 weiß. Es werden nacheinander mit Zurücklegen 10 Kugeln gezogen.



1. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, eine weiße bzw. eine schwarze Kugel zu ziehen.
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) werden genau 2 weiße Kugeln gezogen?
b) ist nur die erste gezogene Kugel weiß?
c) ist mindestens eine der gezogenen Kugeln weiß?
d) ist höchstens eine der gezogenen Kugeln weiß?

3. Wie viele Kugeln muss man ziehen, damit sich mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % unter den gezogenen Kugeln eine weiße Kugel befindet?
4. In die Urne werden zusätzlich r rote Kugeln gelegt. Bestimmen Sie r so, dass die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen, gleich $\frac{4}{9}$ ist.

Lösung zu M 8

1. P(weiß) = $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ und P(schwarz) = $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

2. a) Es ist eine Bernoulli-Kette der Länge n = 10 mit Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{5}$;

$B(10; \frac{1}{5}; 2) = P(X = 2) = \binom{10}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^8 = 45 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^8 \approx 0{,}302$.

b) Erst kommt eine weiße Kugel, dann folgen 9 schwarze Kugeln: $P = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^9 \approx 0{,}0268$.

c) Wegen der Formulierung „mindestens eine“ müssten verschiedene Fälle betrachtet werden. Einfacher ist es, das Gegenereignis „Keine der gezogenen Kugeln ist weiß.“ zu betrachten. Dann gilt: P(Mindestens eine der gezogenen Kugeln ist weiß.) = 1 – P(Keine der gezogenen Kugeln ist weiß.) = 1 – P(Alle Kugeln sind schwarz.).

$P = 1 - B(10; \frac{1}{5}; 0) = 1 - \binom{10}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^{10} = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{10} \approx 0{,}893$

d) $P(X \leq 1) = B(10; \frac{1}{5}; 0) + B(10; \frac{1}{5}; 1) = \binom{10}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^9 \approx 0{,}376$

3. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^n > 0{,}9$;

$\left(\frac{4}{5}\right)^n < 0{,}1 \Leftrightarrow n \cdot \ln\left(\frac{4}{5}\right) < \ln(0{,}1) \Leftrightarrow n \cdot \ln(0{,}8) < \ln(0{,}1)$

Wir dividieren durch ln 0,8. Da ln 0,8 < 0, so folgt: $n > \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}8)} = 10{,}32$.

Ergebnis: Man muss mindestens 11-mal ziehen.

4. $\frac{r}{10+r} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow 9r = 40 + 4r \Leftrightarrow r = 8$. Man muss zusätzlich 8 rote Kugeln dazulegen.

M 11 Vertiefung: eine Eignungsprüfung

Aufgabe

Die Personalchefin eines Unternehmens muss eine Eignungsprüfung erstellen. Dazu wählt sie jährlich aus einem Katalog von 50 Fragen 6 Fragen zufällig aus.

1. Wie viele Möglichkeiten hat sie, die Prüfung zusammenzustellen, wenn die Reihenfolge der Fragen keine Rolle spielt?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Prüfung genau eine Frage enthält, die bereits im Jahr zuvor gestellt wurde?
3. Zu jeder Frage werden 5 Antworten zur Auswahl vorgegeben, von denen genau eine richtig ist. Einem Prüfling sind alle Fragen völlig schleierhaft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens 2 Antworten zufällig richtig ankreuzt?

Die Chefin über dem Test

Lösung zu M 11

1. Aus einer 50-elementigen Menge können $\binom{50}{6}$ Teilmengen entnommen werden.

   $\Rightarrow$ Es gibt etwa 15 890 700 Möglichkeiten, die Prüfung zusammenzustellen.

2. Für die Anzahl der möglichen Prüfungen, die genau eine Frage aus dem Vorjahr enthalten und fünf Fragen aus den restlichen 44 Fragen, gilt:

   $\binom{6}{1}\cdot\binom{44}{5} = 6\cdot 1086\,008 = 6\ 516\ 048\,.$

   $\Rightarrow$ P (genau eine Frage aus dem Vorjahr) = $\dfrac{6\ 516\ 048}{15\ 890\ 700} \approx 0{,}41 = 41\ \%$

3. Es ist eine Bernoulli-Kette der Länge n = 6 mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = \dfrac{1}{5}$.

   Lösungsidee:

   Wir betrachten das Gegenereignis „Der Prüfling kreuzt keine oder genau eine Antwort richtig an.“. Dann gilt:

   P(mindestens 2 Antworten richtig) = 1 – P(keine oder genau eine Antwort richtig)

   P(keine oder genau eine Antwort richtig) =

   $$B(6;\ \tfrac{1}{5};\ 0) + B(6;\ \tfrac{1}{5};\ 1) = \binom{6}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^6 + \binom{6}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^5 \approx 0{,}655\,.$$

   Also:

   Die Wahrscheinlichkeit, dass der Prüfling zufällig 2 richtige Antworten ankreuzt, ist

   1 – 0,655 = 0,34464 $\approx$ 0,345.

   Mit 34,5%-iger Wahrscheinlichkeit kreuzt der Prüfling mindestens 2 Antworten zufällig richtig an.

II/C

M 12 Vertiefung: kreuz und quer – den Lernerfolg feststellen

1. Lehrerin Sonja Maier kontrolliert in ihrem Mathematikunterricht monatlich 10-mal stichprobenartig die Hausaufgaben von 25 % ihrer Schüler der Klasse 9 a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Schüler/eine Schülerin der 9 a, nicht kontrolliert zu werden?

2. Nach Angaben der Deutschen Post erreichen 90 % der Briefe am folgenden Tag ihren Empfänger. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 30 abgeschickten Briefen 6 Stück länger als einen Tag brauchen.

3. Auf einem Fest wird eine Tombola zu Gunsten von „Menschen in Not“ veranstaltet. Unter 100 Losen gibt es zwei Gewinne. Katharina kauft 10 Lose. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie mindestens einen Gewinn?

4. Die Erfahrung zeigt, dass in Großstädten ca. 5 % der Fahrgäste in der U-Bahn, S-Bahn und im Bus keine Fahrkarte gekauft haben, also sog. Schwarzfahrer sind.

   Es werden 30 Fahrgäste unabhängig voneinander kontrolliert. Für die zufällige Anzahl der Schwarzfahrer gilt die Binomialverteilung. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

   E_1: Unter den 30 Fahrgästen befindet sich kein Schwarzfahrer.
   E_2: Unter den 30 Fahrgästen sind mehr als drei Schwarzfahrer.

Lösung zu M 12

1. Es ist eine Bernoulli-Kette der Länge n = 10 mit der Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,25.

   $$P(X=0)=\binom{10}{0}\cdot 0{,}25^0\cdot 0{,}75^{10}\approx 0{,}056$$

   Die Chance für einen Schüler, nicht kontrolliert zu werden, liegt bei etwa 6 %.

2. Lösungsidee: Wenn 6 Stück länger als einen Tag brauchen, müssen demnach 24 Stück pünktlich ankommen.

   $$P(X=24)=B(30;\ 0{,}9;\ 24)=\binom{30}{24}\cdot 0{,}9^{24}\cdot 0{,}1^{6}=\binom{30}{6}\cdot 0{,}9^{24}\cdot 0{,}1^{6}\approx 0{,}047$$

   Die Wahrscheinlichkeit, dass 6 Briefe länger als einen Tag brauchen, beträgt etwa 4,7 %.

3. P(mindestens 1 Gewinn) = 1 – P(kein Gewinn)

   $$P(X=0)=B(10;\ 0{,}02;\ 0)=\binom{10}{0}\ 0{,}02^{0}\cdot 0{,}98^{10}\approx 0{,}82 \quad\Rightarrow\quad P(X\geq 1)=1-0{,}82=0{,}18$$

   Mit einer Wahrscheinlichkeit von 18 % ist bei 10 Losen mindestens 1 Gewinn dabei.

4. Die Anzahl der Schwarzfahrer unter den 30 kontrollierten Fahrgästen ist binomialverteilt. Also: $P(E_1)=P(X=0)=0{,}95^{30}\approx 0{,}2146$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 21,5 % sind unter 30 zufällig kontrollierten Fahrgästen keine Schwarzfahrer.

   $$P(E_2)=1-P(X\leq 3)$$

   $$P(X\leq 3)=0{,}95^{30}+30\cdot 0{,}95^{29}\cdot 0{,}05^{1}+\binom{30}{2}\cdot 0{,}95^{28}\cdot 0{,}05^{2}+\binom{30}{3}\cdot 0{,}95^{27}\cdot 0{,}05^{3}\approx 0{,}9392$$

   $P(E_2)=1-0{,}9392=0{,}061$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 6 % sind unter 30 zufällig ausgewählten Fahrgästen mehr als 3 Schwarzfahrer.