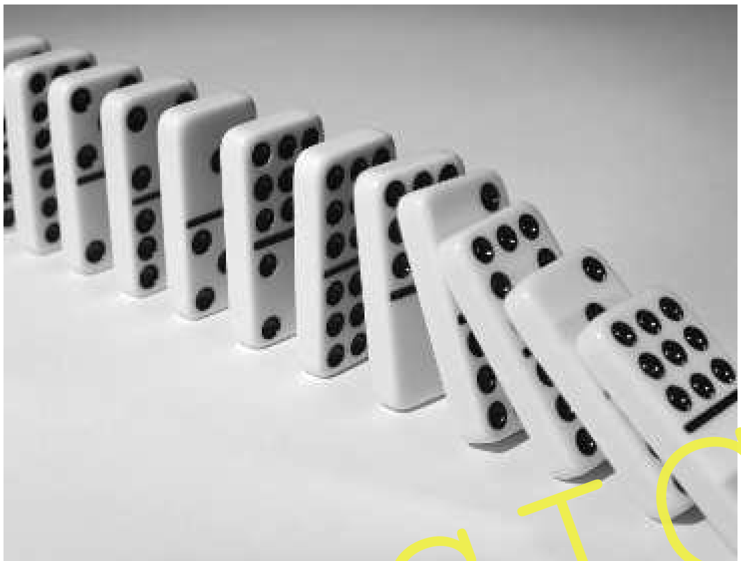
Mit vollständiger Induktion mathematische Muster beweisen

Dr. Heinrich Schneider, Wien, Prof. Dr. Florian Schacht, Essen



Wenn der erste Dominostein fällt und durch jeden fallenden Dominostein der nächste umgestoßen wird, so wird schließlich jeder Dominostein der unendlich lang gedachten Kette irgendwann umfallen.

Klasse: 10–12

Dauer: 4–6 Stunden

Inhalt: Prinzip der vollständigen Induktion; Nutzung von Repräsentationswechseln; Vielfältige Aufgaben zum Üben

Ihr Plus

- ✓ Aufgaben- und Lösungskartei zur differenzierenden Gestaltung des Lernprozesses
- ✓ Hoher Grad an Schüleraktivität
- ✓ Wechsel der Repräsentationsebenen und Arbeitsformen (Think, Pair, Share)
- ✓ Vielfalt an Begründungsvarianten (generisches Beispiel, generisches Bild und formal-algebraischer Beweis)

Für viele klingt ***Mathematisches Beweisen*** nach Formalismus, kryptischer Symbolik und einer Art höherer Kunst. Dabei können Beweise sehr anschaulich sein. Sie können durch geeignete Abbildungen visualisiert werden und in einer Sprache verfasst sein, die nicht notwendig an Formalismen hängt. Kurz: Das **Beweisen** ist eine der Kerntätigkeiten der Mathematik. Mit Beweisen können wir Muster und Strukturen verallgemeinern, wir können Zusammenhänge nicht nur beschreiben, sondern diese auch begründen.

Im Laufe der Geschichte haben sich in der Mathematik unterschiedliche Beweisprinzipien herausgebildet. Eine besonders reizvolle Beweisvariante ist die **vollständige Induktion**. Auch damit lassen sich mathematische Muster und Strukturen allgemein begründen. Thematisiert wird die vollständige Induktion in diesem Beitrag anhand generischer Beispiele, generischer Bilder und formal-algebraischer Beweise.

Didaktisch-methodische Hinweise

Wir alle haben uns an **Verallgemeinerungen** gewöhnt. Sie dienen uns zur Orientierung im Alltag.

Beispiele:

- Aller Anfang ist schwer.
- Jeder macht Fehler.
- Man kann niemandem trauen.

Manche solcher Aussagen haben eine statistische Berechtigung, ohne auf jeden Einzelfall anwendbar zu sein. Es gibt aber auch Verallgemeinerungen, die man beweisen kann. Darum geht es in diesem Beitrag.

Vollständige Induktion – Beweisen ist erlernbar!

Formalismus, kryptische Symbolik und eine Art höherer Kunst – viele Schüler finden nur schwer Zugang zu mathematischen Beweisen. Dabei können Beweise sehr anschaulich sein. Sie können durch geeignete Abbildungen visualisiert werden und in einer Sprache verfasst sein, die nicht notwendig an Formalismen hängt. Kurz: Das Beweisen ist eine der **Kerntätigkeiten der Mathematik**. Mit Beweisen können wir Muster und Strukturen verallgemeinern, Zusammenhänge nicht nur beschreiben, sondern diese auch begründen. Die Mathematik kennt unterschiedliche Beweisprinzipien.

Eine besonders reizvolle Beweisvariante ist die **vollständige Induktion**. Auch damit lassen sich mathematische Muster und Strukturen allgemein begründen. Das Prinzip der vollständigen Induktion beruht auf der Idee, die Behauptung zunächst für einen überprüfbaren Fall $n = 0$ oder $n = 1$ zu zeigen und sie dann im Induktionsschritt von $n \rightarrow n + 1$ zu verallgemeinern. Für den Lernprozess Ihrer Schüler ergeben sich daraus viele Potentiale im Spannungsfeld von Kreativität und Schematisierung. Das meint, dass Begründungen, die das Prinzip der vollständigen Induktion nutzen, einerseits einer formalen Struktur unterliegen, angezeigt durch den **Induktionsanfang**, die **Induktionsvoraussetzung** und den **Induktionsschritt**. Gleichzeitig erfordern Induktionsbeweise viel Kreativität. Unterstützt werden die Beweisprozesse Ihrer Schüler mit den vorliegenden Materialien durch konsequente Repräsentationswechsel, durch die die zu begründenden Muster visualisiert werden können.

Lehrplanbezug

→ siehe separater Kasten unter der Verlaufsübersicht (Seite 5)

Aufbau des Beitrags

M 1 Mathematische Verallgemeinerungen beschreiben und begründen

Kerngedanke des Materials **M 1** ist neben der aktiven Erkundung mathematischer Muster und Strukturen insbesondere eine motivierende Hinführung zum Prinzip der vollständigen Induktion. Im Zentrum steht dabei zunächst die Erfahrung, dass mathematische Beweise unterschiedliche Gesichter haben – sei es verbal, grafisch oder symbolisch durch Nutzung allgemeiner Terme und Variablen. Mathematische Beweise stellen in besonderer Weise die Möglichkeit dar, Strukturen zu verallgemeinern und zu begründen. Dies geschieht hier zunächst anhand von **Dreieckszahlen**. Die Idee der ersten Aufgabe ist, dass Ihre Schüler eine möglichst geschickte Strategie nutzen, um hohe Dreieckszahlen zu bestimmen.

Dies führt dann zu der bekannten Formel für die n-te Dreieckszahl:

$$\Delta_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Anschaulich lässt sich dieser Term mit dem dargestellten Bild so in Verbindung bringen, dass durch geschicktes Anlegen eines zweiten Dreiecks ein Rechteck der Länge n und der Breite n + 1 entsteht. Die ursprüngliche Dreiecksform erhält man nun dadurch, dass man die Anzahl der Punkte wieder halbiert. Nehmen Sie sich gerade zu Beginn der Einheit im Unterricht die Zeit, unterschiedliche Strategien Ihrer Schüler zu diskutieren und zu vergleichen. Ihre Schüler erleben auf diese Weise die Kraft von Repräsentationswechseln: Die Terme bekommen eine Bedeutung, sie können mit dem Punktmuster identifiziert werden.

Diese erste Aufgabe dient einerseits dem motivierenden **Einstieg** in die Einheit. Gleichzeitig wird sie dann in der Aufgabenkartei wieder aufgegriffen (u. a. in **M 4**, Aufgaben 1 und 2).

Die dann folgende Aufgabe, **Muster in Zahlenfolgen**, führt hin zum Gegenstandsbereich der vollständigen Induktion. Die abgebildete **Selbstkontrolle** sollten Ihre Schüler erst dann nutzen, wenn sie sich intensiv mit den mathematischen Beispielen auseinandergesetzt haben. Auch mit dem anschließenden Beweis zur ersten Aussage sollten sich Ihre Schüler ausgiebig beschäftigen. Hier vollziehen sie dann in einer Aufgabe selbst den Repräsentationswechsel in umgekehrter Richtung, indem sie den Beweisschritt mithilfe des Punktbildes visualisieren.

M 2 und M 3 Begriffsbestimmung zur vollständigen Induktion

Im Rahmen des Informationstextes erarbeiten sich Ihre Schüler das Prinzip der vollständigen Induktion. Die unterschiedlichen Beispiele verdeutlichen das Prinzip selbst. Darüber hinaus bieten sie auch vielfältige Hilfen an, die die Schüler bei der Bearbeitung der Aufgabenkartei in **M 4** nutzen. Insbesondere die Partnerarbeit in **M 3** regt Ihre Schüler dazu an, eigene Muster in Zahlenfolgen zu finden und diese dann – mittels vollständiger Induktion – zu begründen. Auch bei dieser Aufgabe wird ein konsequenter Repräsentationswechsel genutzt.

M 4 Aufgabenkartei und Lösungskartei

Diese Materialien stellen einen umfangreichen **Aufgabenpool für differenzierendes Üben** in Ihrem Unterricht bereit. Die Niveaudifferenzierung gelingt einerseits dadurch, dass die Schüler je nach Geschwindigkeit und Leistungsstärke unterschiedlich viele Aufgaben selbstständig bearbeiten können. Andererseits bietet die Aufgabenkartei durchaus thematisch vielfältige Aufgaben, etwa

- zu konkreten Begründungen mathematischer Zusammenhänge mittels vollständiger Induktion,
- zur Nutzung des Repräsentationswechsels,
- zum Vergleich unterschiedlicher Aufgaben der Kartei sowie zur Begründung und Herleitung der jeweiligen Terme.

Für die praktische Umsetzung im Unterricht empfiehlt es sich, die **Karteikarten** – etwa in fünffacher Ausführung zu kopieren, zu laminieren und zurechtzuschneiden. Auch die **Lösungskartei** sollten Sie entsprechend kopieren und laminieren – wobei für die Umsetzung ein Zurechtschneiden der Aufgaben nicht notwendig ist. Ihre Schüler können dann unterschiedliche Aufgaben aus der Kartei bearbeiten und anschließend die Lösungen auf der Lösungskarte, die zentral an einer Stelle des Klassenzimmers ausliegt, einsehen und vergleichen. Genauere **Tipps zur praktischen Umsetzung** in Ihrem Unterricht sind im Erläuterungsteil am Ende des Beitrages enthalten.

Auf einen Blick

Material	Thema	Stunde
M 1	**Mathematische Verallgemeinerungen kennenlernen** Muster in Punktbildern und Muster in Zahlenfolgen finden Einfache Beweise	1./2.
M 2	**So funktioniert das Verfahren der vollständigen Induktion!** Erklärung der notwendigen Begriffe	
M 3	**Muster finden und mit vollständiger Induktion begründen** Zahlenmuster finden, verallgemeinern und beweisen	3.
M 4	**Üben, üben, üben – Aufgabenkartei** Übungsaufgaben	4.–6.

Minimalplan

Bei Zeitnot beschränken Sie sich auf Teil 1 der Aufgabenkartei (**M 4**).

Lehrplanbezug

Begründen bzw. Beweisen gehört zu den übergeordneten allgemeinen Kernkompetenzen, die im Verlauf des Mathematikunterrichts gebunden an geeignete Inhalte […] vermittelt werden sollen. Lernziele sind unter anderem:

- elementare Regeln und Gesetze der Logik kennen und anwenden
- Begründungstypen und Beweismethoden der Mathematik kennen, gezielt auswählen und anwenden
- in mathematischen Kontexten Vermutungen entwickeln, formulieren und untersuchen
- gleichartige Strukturen erkennen, verallgemeinern und spezialisieren[1]

In diesem Zusammenhang sind auch eine **korrekte Fachsprache** sowie die Hierarchie mathematischer Aussagen zu thematisieren. Ziel ist es, schülerorientiert und altersgemäß innermathematische Zusammenhänge zu erschließen und deren Darstellung zunehmend stärker zu formalisieren. Der für die Mathematik typische **logisch-kausale Prozess** der Erkenntnisgewinnung muss auch im Unterricht deutlich werden; auf der Basis von unmittelbar Offensichtlichem (**Fundamentalsätze**) lassen sich sukzessive weitergehende Aussagen erschließen (**mathematische Sätze**), sodass schrittweise ein in sich konsistentes mathematisches „Gedankengebäude" entsteht. Dabei ist es unumgänglich, dass der Schüler die Notwendigkeit von Begründungen bzw. Beweisen einsieht.[2]

Das **Verfahren der vollständigen Induktion** soll laut Lehrplänen[3] in **Klasse 10** (Lernbereich 1: Mathematische Beweise (Richtstundenzahl 12)) als Beweismethode eingeführt werden, die in der gymnasialen Oberstufe und darüber hinaus immer wieder zum Einsatz kommt. Insbesondere werden Aussagen über die **natürlichen Zahlen** anhand dieses Schemas durch methodisches Vorgehen sowie geschickte Termumformungen bewiesen.

---

1 LP Baden-Württemberg als Beispiel (http://www.bildung-staerkt-menschen.de/service/downloads/Bildungsplaene/Gymnasium/Gymnasium_Bildungsplan_Gesamt.pdf);

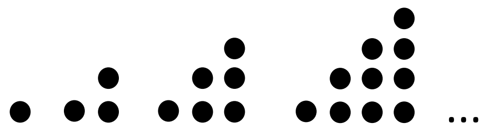
2 LP Bayern http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26641

3 LP Freistaat Sachsen, S. 59 http://marvin.sn.schule.de/~gymengel/content/schule/faecher/mathe/download/lehrplan.pdf

M 1 Mathematische Verallgemeinerungen kennenlernen

Muster in Punktbildern (Einzelarbeit)

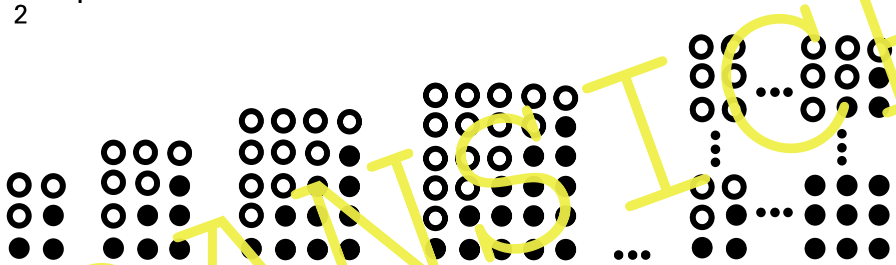
a) Bestimmen Sie die Anzahl der Punkte zunächst im 5. Bild, dann im 6. Bild und im 10. Bild.



b) Finden Sie eine geschickte Möglichkeit, möglichst schnell die Punkte im 100. Bild zu bestimmen.

c) Begründen Sie, wie sich mithilfe der folgenden Abbildung der allgemeine Term zur Bestimmung der Punkte im n-ten Bild herleiten lässt:

$$\Delta_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$



Tandembogen: Muster in Zahlenfolgen

Stellen Sie den Tandembogen in der Mitte zwischen sich und Ihrem Partner auf. Einer löst die Aufgaben, der andere kontrolliert die Lösung. Wer welche Aufgabe übernimmt, entscheiden Sie durch Würfeln. Wer als erster eine Sechs würfelt, prüft die Lösungen.

Drei Beispiele:

Setzen Sie fort! Was fällt Ihnen auf?

a) $1 = 1;\ 1 + 3 = 4;\ 1 + 3 + 5 = 9;\ 1 + 3 + 5 + 7 = 16$ (Beispiel 1)

b) $1^2 + 1 + 5 = 7;\ 2^2 + 2 + 5 = 11;\ 3^2 + 3 + 5 = 17;\ 4^2 + 4 + 5 = 25$ (Beispiel 2)

c) $2 > 1;\ 4 > 2;\ 8 > 3;\ 16 > 4$ (Beispiel 3)

Hier knicken

Lösungen Ihres Partners:

a) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$, stets eine Quadratzahl

b) $5^2 + 5 + 5 = 35$, stets eine ungerade Zahl, nicht immer eine Primzahl

c) $32 > 5$, stets eine wahre Aussage

M 2 So funktioniert das Verfahren der vollständigen Induktion!

Die sog. „**vollständige Induktion**“ ist keine Methode, mit der man etwas Mathematisches entdecken kann, sondern ein nützliches **Beweisverfahren**. Sie bezieht sich auf Aussagen (eigentlich Aussageformen), die von einer natürlichen Zahl n abhängen.

Das Verfahren besagt: Wenn eine Aussageform A(n)

1. für einen Ausgangswert n_0, z. B. $n_0 = 1$ eine wahre Aussage ergibt und wenn
2. aus der Annahme, dass für einen beliebigen Wert n eine wahre Aussage entsteht, bewiesen werden kann, dass auch für den Wert n + 1 eine wahre Aussage entsteht,

dann ergibt A(n) für alle $n \geq n_0$ eine wahre Aussage.

Anmerkung: 1. heißt Induktionsanfang, 2. Induktionsschritt und enthält die sog. Induktionsannahme beziehungsweise die Induktionsvoraussetzung. Diese besagt, dass A(n) für ein allgemeines n als wahr vorausgesetzt wird.

Das Verfahren kann intuitiv akzeptiert oder axiomatisch untermauert werden.

5-tes Peano'sches Axiom:

Jede Menge von den natürlichen Zahlen, welche die Zahl 1 und zu jedem Element auch dessen Nachfolger enthält, enthält alle natürlichen Zahlen.

Auf dieses Axiom beruht die Methode der vollständigen Induktion.

Quelle: School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland

Giuseppe Peano (1858–1932) war ein italienischer Mathematiker.

Anwendung auf **Beispiel 1 (aus M 1)**:

A(n): $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \quad | + (2n + 1)$

A(1): $1 = 1^2$ ist eine wahre Aussage (Induktionsanfang)

A(n + 1): $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2(n+1) - 1) = n^2 + (2n+1) \underset{\text{(1. binom. Formel)}}{=} (n+1)^2$

Damit ist auch der Induktionsschritt gelungen.

Anwendung auf **Beispiel 2 (aus M 2)**:

$A(1) = 1^2 + 1 + 5 = 5$ prim

Zur Primzahldarstellung muss der Induktionsschritt misslingen, da immer wieder zusammengesetzte Zahlen auftreten, z. B.

A(5t) mit $t \in \mathbb{N}$ ist durch 5 teilbar, da $A(5t) = (5t)^2 + 5t + 5 = 5 \cdot (5t^2 + t + 1)$.

Wenn $n^2 + n + 5$ ungerade, also gleich $2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, ist, dann ist

$(n + 1)^2 + (n + 1) + 5 = n^2 + n + 5 + 2(n + 1)$ auch ungerade (da $2(n+1)$ gerade).

Der Induktionsschritt gelingt (und auch der Induktionsanfang, da $1^2 + 1 + 5$ ungerade ist).

Das dritte Beispiel wurde bereits durch vollständige Induktion gelöst.

Aufgabe: Die Summe zweier gleicher gerader Zahlen

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Summe zweier gleicher gerader Zahlen durch 4 teilbar ist. Nutzen Sie dafür die folgende Struktur:

A(n): A(1): A(n + 1):

Visualisieren Sie A(1) sowie A(n + 1) jeweils durch ein Punktbild und verdeutlichen Sie die Argumentation des Beweises anhand des Bildes.

II/F

M 4 Üben, üben, üben – Aufgabenkartei (Teil 1)

①

Aufgabe 1

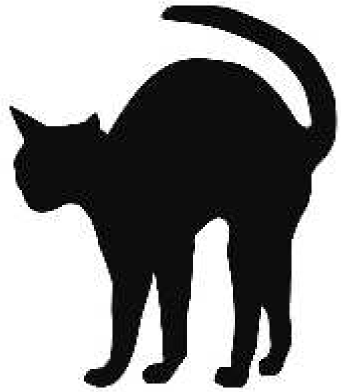
$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Aufgabe 2

Wie kommt man in Aufgabe 1 auf den Ausdruck:

$\frac{1}{2}n(n+1)$?

Stellen Sie Ihre Lösung auch grafisch mithilfe eines Punktbildes dar und verdeutlichen Sie daran Ihre Lösung.



Gruppe „Katze"

Aufgabe 3

$1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n-1)$

Aufgabe 4

$1+5+9+\ldots+(4n-3)=n(2n-1)$

②

Aufgabe 5

$1+3+6+\ldots+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

Aufgabe 6

$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

Gruppe „Hund"

Aufgabe 7

Vergleichen Sie Aufgabe 5 mit Aufgabe 6.

Aufgabe 8

$1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+\ldots+(2n-1)\cdot 2n=\frac{1}{3}n(n+1)(4n-1)$

Lösungen und Tipps zum Einsatz

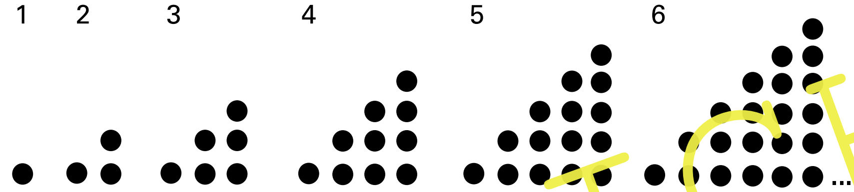
M 1 Mathematische Verallgemeinerungen kennenlernen

In dieser offenen Erkundungsphase arbeiten Ihre Schüler mit verschiedenartigen Mustern und Strukturen – sowohl in **Zahlenfolgen** als auch in **Punktbildern**. Motivieren Sie die Lernenden, unterschiedliche Varianten für die Bestimmung hoher Stellen der Punktbilder zu finden. Gerade für solche hohen Stellen führen Sie den Übergang von rekursiver hin zu expliziter Betrachtung solcher Musterfolgen ein. Diese explizite Betrachtung erfordert das Suchen nach Strukturen, die im nächsten Schritt begründet werden müssen – etwa mittels vollständiger Induktion.

a), b)

Bei einer rekursiven Bestimmung der Punkte in den Bildern ergibt sich die Anzahl der Punkte im nächsten Bild immer aus der Anzahl der Punkte im vorangegangenen Bild.

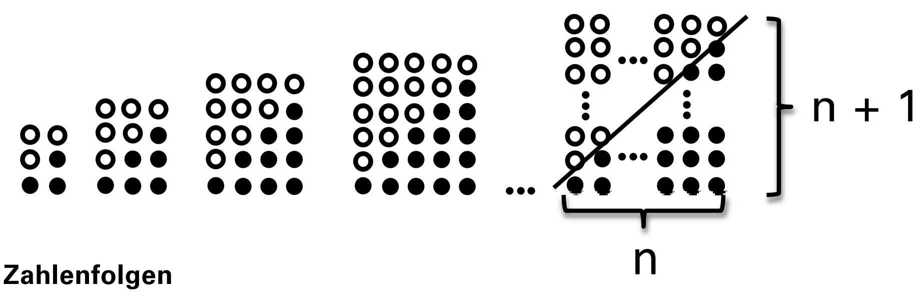
Bild: 1 2 3 4 5 6



Bei der expliziten Bestimmung können die Punkte direkt angegeben werden. So gilt etwa:

$$\Delta_5 = \frac{5\cdot(5+1)}{2} = 15; \Delta_6 = \frac{6\cdot(6+1)}{2} = 21; \Delta_{10} = \frac{10\cdot(10+1)}{2} = 55 \text{ und } \Delta_{100} = \frac{100\cdot(100+1)}{2} = 5050.$$

c) Der Term $\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$ für das n-te Punktbild lässt sich schließlich so deuten, dass das Dreieck verdoppelt wird und an das ursprüngliche Dreieck angelegt wird. Auf diese Weise erhält man ein Rechteck der Länge n und der Breite n + 1, dessen Punktanzahl halbiert werden muss. Wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass Ihre Schüler die Struktur des allgemeinen Bildes verbal beschreiben und mithilfe des Terms interpretieren.

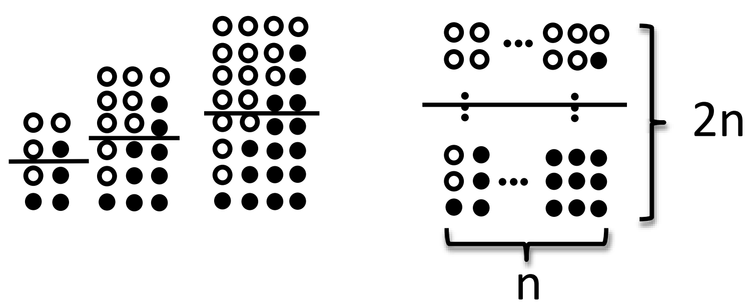


Muster in Zahlenfolgen

In einem nächsten Schritt vollziehen die Schüler den Beweis für den folgenden Zusammenhang nach:

$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.

Anschaulich gesprochen wird beim Beweis jeder Summand verdoppelt, das Prinzip ist dem der ersten Aufgabe ähnlich. Die Schüler visualisieren nun – umgekehrt – diesen Beweisgang mit einem Punktbild.



II/F