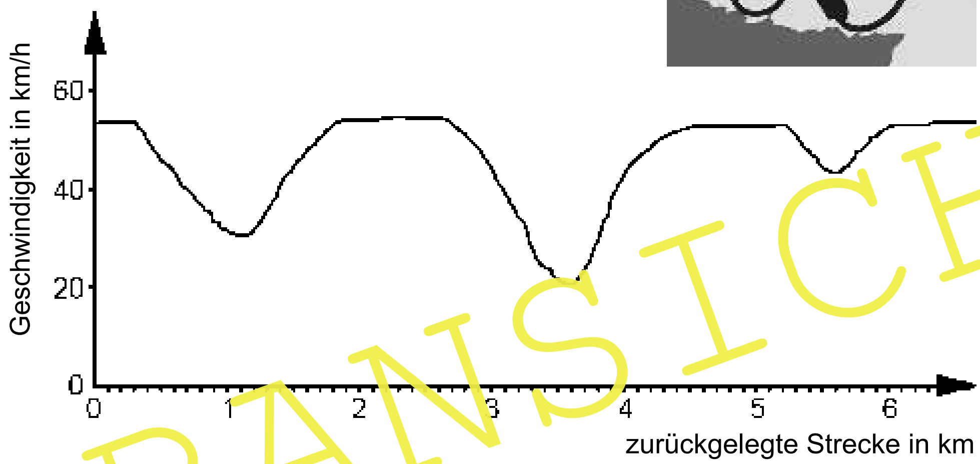
Eine Grundvorstellung vom Funktionsbegriff entwickeln – ein Konzept für die Praxis

Tom Bauernfeind, Dortmund



Der Graph zeigt den Geschwindigkeitsverlauf eines Rennradfahrers bei der Tour de France während einer „fliegenden" Runde auf den Champs Elysées in Paris.

Klasse: 9./10. Klasse

Dauer:
- je nach Einsatz, ca. 3 Doppelstunden für die Bearbeitung aller vier Module (in diesem Beitrag: nur das **Basismodul B**, die restlichen Module finden Sie in einem Folgebeitrag)
- für den **Diagnose-Test** ca. 40 Min, bei gemeinsamer Auswertung durch die Lernenden ca. 1 Doppelstunde, für das Basismodul ca. 1 Schulstunde

Inhalt: Diagnose der Ausprägung der Grundvorstellungen zu Funktionen

Grundsätzliches zum Funktionsbegriff

Darstellungsweisen von Funktionen

Funktionsterme, Funktionsgleichungen

Berechnen von Funktionswerten

Darstellungswechsel

Ihr Plus:
- ✓ komprimiertes Fachwissen
- ✓ praktikabler Diagnosetest (und Nachtest in einem Folgebeitrag)
- ✓ Module, die im Gesamtkonzept oder aber isoliert einsetzbar sind
- ✓ insbesondere geeignet für den Förderunterricht

Didaktisch-methodische Hinweise

Der vorliegende Beitrag beinhaltet **Diagnose-** und individuell zusammenstellbares **Fördermaterial zum Funktionsbegriff.** Setzen Sie bei den vorhandenen Kompetenzen Ihrer Lernenden an und entwickeln Sie diese gezielt weiter!

Fördermaterialien zum Umgang mit Funktionen gibt es viele, wenige rücken jedoch die Entwicklung von **Grundvorstellungen** seitens der Lernenden differenziert in den Fokus der Betrachtung. Das vorgestellte Konzept zeigt einen praxiserprobten Diagnose- und Förderansatz, der diesem Umstand begegnet, indem Grundvorstellungen differenziert in den Blick genommen und explizit thematisiert werden.

Einführung und Genese – Lehrplanbezug

Die Analyse von Funktionen stellt einen zentralen Inhalt der **gymnasialen Oberstufe** dar, der auch im **Abitur** abgeprüft wird. Die Beiträge der Schüler zeigen in der Praxis jedoch häufig, dass die Lernenden nicht über die nötigen **Basiskompetenzen** zu Beginn der Sekundarstufe II verfügen. Dies verdeutlicht ein kurzer Auszug eines beobachteten Unterrichtsgesprächs:

Lehrerin: „Wie ändert sich denn an dieser Stelle die Funktion?“

Schüler: „Wie meinen Sie das? Ändert sich die Funktion? Die Funktion bleibt doch gleich, also der Graph.“

Lehrerin: „Wie verändern sich die Funktionswerte, wenn sich die Stelle ändert?“

Schülerin: „Wie soll sich denn eine Stelle ändern? Das ist doch eine Zahl auf der x-Achse.“

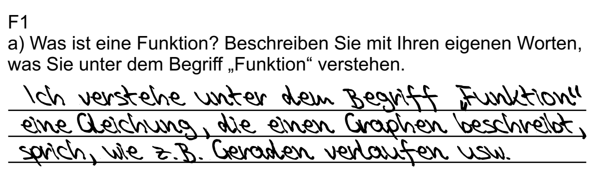
Lehrerin: „Bevor wir uns mit der Frage nach der Veränderung weiter beschäftigen, lasst uns doch mal etwas Grundsätzliches klären: Was ist überhaupt eine Funktion?“

Schüler: „Eine Funktion ist ein Graph.“

Die Abbildung unten zeigt exemplarisch weitere Schülerbeiträge, die im Rahmen der Durchführung des vorliegenden Konzepts entstanden sind. Wenngleich diese Beiträge wichtige Aspekte von Funktionen ansprechen, kann von einem Grundverständnis des Funktionsbegriffs, welches die Aspekte **Zuordnung**, **Veränderung** und **Gesamtverlauf** in gewisser Weise implizit umfassen sollte, nicht ausgegangen werden.

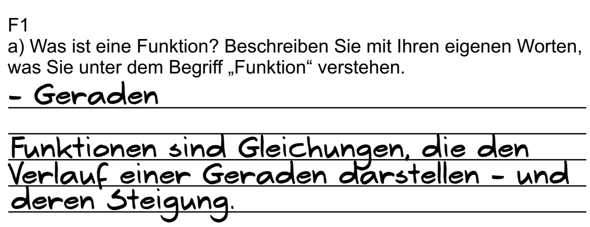
Oft liest man in der fachdidaktischen Literatur von Grundvorstellungen über Funktionen. Allzu selten jedoch etwas darüber, wie man die Entwicklung dieser konkret bei den Lernenden fördern kann, wenn man bestimmte Schwierigkeiten diagnostiziert hat.

Vor diesem Hintergrund entstand die Idee zur Entwicklung des im Folgenden vorgestellten Diagnose- und Fördermoduls.



F1
a) Was ist eine Funktion? Beschreiben Sie mit Ihren eigenen Worten, was Sie unter dem Begriff „Funktion“ verstehen.

Ich verstehe unter dem Begriff „Funktion“ eine Gleichung, die einen Graphen beschreibt, sprich, wie z.B. Geraden verlaufen usw.



F1
a) Was ist eine Funktion? Beschreiben Sie mit Ihren eigenen Worten, was Sie unter dem Begriff „Funktion“ verstehen.

- Geraden

Funktionen sind Gleichungen, die den Verlauf einer Geraden darstellen – und deren Steigung.

Konzeption des Diagnose- und Förderkonzepts

Insbesondere der an Material der **Projektgruppe SINUS-NRW** (Brauner, Hoffert, 2013) angelehnte **Eingangstest** (**M 1**) zur Diagnose von Schülerkompetenzen für den Übergang in die Sekundarstufe II stellt eine hervorragende Möglichkeit der Diagnose dar.

Der vorliegende Diagnose- und Förderansatz orientiert sich darüber hinaus an dem Theorierahmen der mathematischen Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff (vom Hofe, 1995, 2005; Leuders, Prediger, 2005). Die Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff sind im Folgenden dargestellt.

Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff

(GV1) Zuordnungsvorstellung (Modul Z)

Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge: Eine Größe wird einer anderen eindeutig zugeordnet. Einer Ware ist ein Preis zugeordnet, einem Ort die aktuelle oder Durchschnittstemperatur oder einem Zeitpunkt eine Wasserhöhe. Hier werden Größen als abhängig von anderen Größen beschrieben.

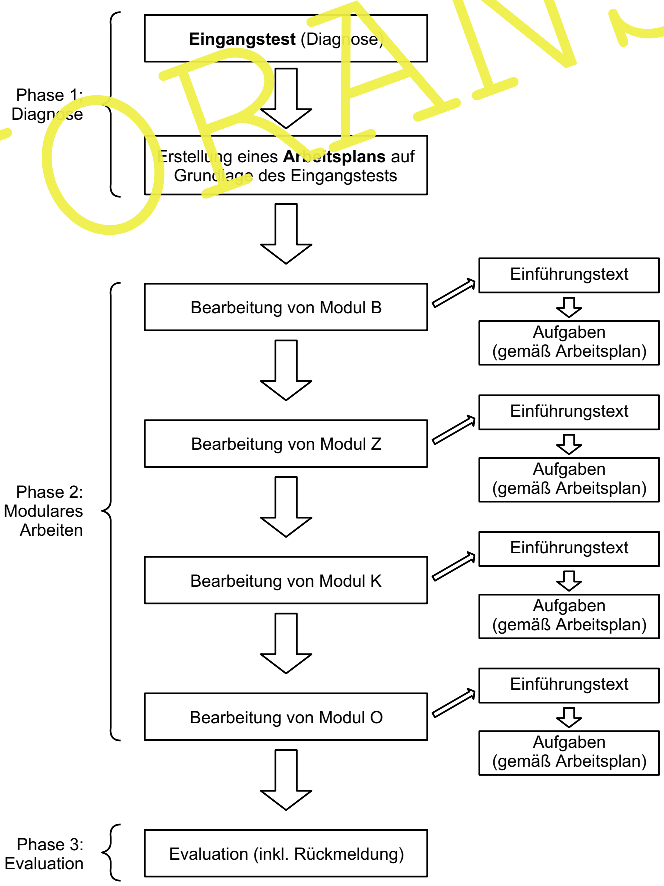
Typische Frage: Welches $f(x)$ gehört zu welchem x ?

(GV2) Kovariationsvorstellung (oder Änderungsvorstellung) (Modul K)

Durch Funktionen erfasst man, wie zwei Größen sich miteinander verändern. Verändert sich die eine Größe, so verändert sich die zugeordnete Größe in bestimmter Weise. Zu der Perspektive der Zuordnung tritt hier die spezifische Dynamik einer Veränderung hinzu, z. B. in Äußerungen wie „je größer die Menge, desto höher der Preis“.

Typische Frage: Wie wirkt sich die Änderung von x auf $f(x)$ aus?

(GV3) Objektvorstellung (oder Vorstellung von der Funktion als Ganzes) (Modul O)



Eine Funktion wird als Ganzes, als eigenständiges mathematisches Objekt sui generis betrachtet.

Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes. So wird ein Gesamtphänomen erfasst und die Funktion tritt einem als eigenständiges Objekt entgegen, etwa als **Graph** oder symbolisch als **Term** oder **Funktionsname**.

Typische Frage: Wie verläuft die Funktion „im Großen und Ganzen“? Gibt es Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Hoch- oder Tiefpunkte? (adaptiert nach Vollrath 1989, Malle 2000, Leuders/ Prediger 2005, Büchter/ Henn 2010)

Aufbau des Konzepts

Das entwickelte Diagnose- und Förderkonzept besteht aus **drei Phasen**: Der Ausgangsdiagnose, dem modularen Arbeiten nach individuellem Förderplan sowie der Evaluation (nebenstehende Abb.).

Auf einen Blick

Material	Thema	Stunde
M 1	**Eingangstest Funktionen** Testaufgaben zur Ausgangsdiagnose und zum Erstellen eines Arbeitsplans	1./2.
M 2	**Items des Eingangstests** Übersicht über die Gewichtung der einzelnen Grundvorstellungen je Testitem	
M 3	**Individueller Arbeitsplan** Arbeitsplan für die Lernenden	
M 4 (Fo)	**Übersicht über den Aufbau des Konzepts** Schafft Transparenz für die Lernenden und sollte während der Arbeit projiziert werden.	
M 5	**Modul B – Basiswissen** Einführungstext zum Basismodul. Dieses muss jedem Lernenden in Kopie vorliegen.	3./4.
M 6	**Modul B – Aufgaben und Lösungen** Aufgabenmaterial zur eigenständigen Durcharbeit.	5.

Minimalplan

Je nach Intention, Bedarf oder zeitlichen Aspekten können Sie zur Diagnose des Ist-Zustandes der Lernenden allein den **Diagnosetest** (**M 1**) verwenden und ggf. darauf reagieren, indem Sie den Lernenden individuelle Rückmeldung und Förderempfehlungen geben.

Alternativ können Sie auf die Diagnose verzichten, und alle Lernenden arbeiten an einzelnen Modulen, da diese losgelöst voneinander einsetzbar sind. So können Sie in einzelnen Stunden bzw. Doppelstunden und Hausaufgaben für einzelne Module (**M 5** und **M 6**, weitere Module folgen!) nutzen.

M 1 Eingangstest Funktionen[1]

F1

a) Was ist eine Funktion? Beschreiben Sie mit Ihren eigenen Worten, was Sie unter dem Begriff „Funktion“ verstehen. B (3)

b) Welche Darstellungsweisen für Funktionen kennen Sie? (D.h. in welchen Formen sind Ihnen Funktionen bisher begegnet?) B (5)

I/C

F2				
Bitte kreuzen Sie je Zeile genau eine Antwort an.			Korrektur	
	richtig	falsch		
a) Funktionen lassen sich sprachlich nicht angeben bzw. darstellen.	☐	☐	B (1)	
b) Eine Funktion ordnet einem Wert immer mindestens einen anderen Wert zu.	☐	☐	B (1) ZuV (1)	
c) Verändert sich der x-Wert, so verändert sich auch der zugeordnete Funktionswert. **Tipp** Denke an die konstanten Funktionen.	☐	☐	KoV (2) ZuV (1)	
d) Der Graph einer Funktion ist immer die beste Darstellung derselben. Ein Funktionsterm oder eine Tabelle sind lediglich Hilfsmittel, um den Graphen der Funktion zeichnen zu können.	☐	☐	B (2) ObV (2)	
e) Mit Funktionen lassen sich nur mathematische Zusammenhänge beschreiben.	☐	☐	B (2)	
f) Eine Funktion beschreibt den Zusammenhang von zwei Größen.	☐	☐	B (1) ZuV (1), KoV	
g) Jeder Graph gehört zu einer Funktion.	☐	☐	B (1)	
h) Eine Funktionsgleichung hat immer die Gestalt f(x) = $\boxed{}$.	☐	☐	B (1)	
i) Jede Zuordnung ist auch eine Funktion.	☐	☐	B (1)	
j) f(a) = 3 · a ist keine Funktionsgleichung, da kein x vorkommt.	☐	☐	B (1)	
k) h(x) = 3 · x ist keine Funktion, da kein f vorkommt.	☐	☐	B (1)	

[1] Eingangstest Mathematik für die Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe, in Anlehnung an: Qualitäts- und UnterstützungsAgentur - Landesinstitut für Schule (QUA-LiS NRW), SINUS Nordrhein-Westfalen, Projekt M2 - Unterrichtskonzepte für den Übergang von der Sek I zur Sek II mit Blick auf die Anforderungen im Zentralabitur, 2011 (http://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front_content.php?idart=3198&matId=2479, zuletzt aufgerufen am 10.05.2016)

I/C

M 1 Eingangstest Funktionen – Blatt 2

F3: Bitte kreuzen Sie je Zeile genau eine Antwort an.

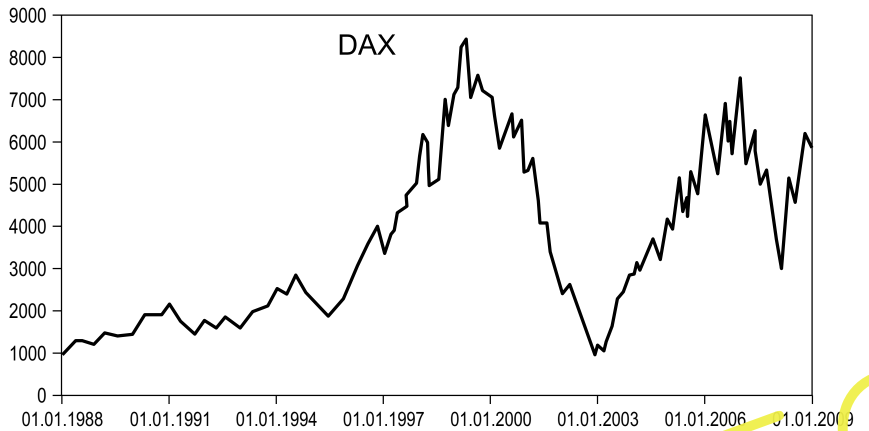
Was bedeutet f(x) = 3 · x ?	richtig	falsch	Korrektur	
a) Der Ausgangsgröße x wird immer ihr Dreifaches zugeordnet.	☐	☐	ZuV (2)	
b) Dem Dreifachen einer Zahl wird immer die Zahl selbst zugeordnet.	☐	☐	B (2), ZuV	
c) Wird x größer, so wird f(x) kleiner.	☐	☐	ZuV (1) KoV (2) ObV (1)	
d) Wird x kleiner, so wird auch f(x) kleiner.	☐	☐	ZuV (1) KoV (2) ObV (1)	
e) Der Funktionsgraph verläuft von links unten nach rechts oben, d. h. für kleiner werdende x-Werte werden die Funktionswerte kleiner und für größer werdende x-Werte werden die Funktionswerte stetig größer.	☐	☐	ZuV (1) KoV (1) ObV (2)	

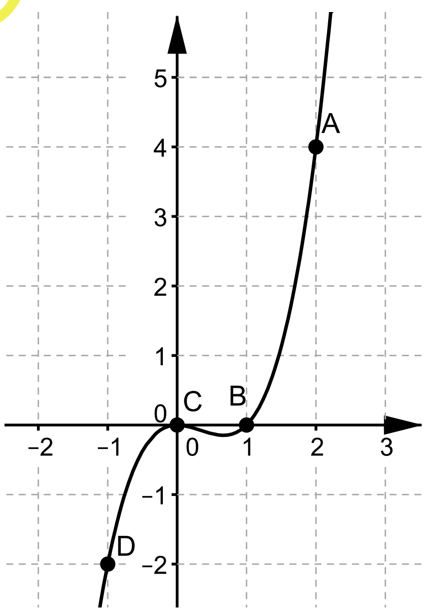
F4[2]

Was bedeutet die Schreibweise $f(4) = 5$ für eine Funktion f? Kreuzen Sie an, ob die Aussagen richtig oder falsch sind!	richtig	falsch	Korrektur	
a) Für den Funktionswert wurde die Zahl 4 eingesetzt.	☐	☐	B (2) ZuV (1)	
b) Der Graph der Funktion verläuft durch den Punkt (4|5).	☐	☐	ZuV (2)	
c) An der Stelle 5 nimmt die Funktion den Wert 4 an.	☐	☐	B (2), ZuV	
d) Egal, was man einsetzt, es kommt immer 5 heraus.	☐	☐	ZuV (1) B (2)	
e) An der Stelle 4 nimmt die Funktion den Wert 5 an.	☐	☐	ZuV (2) B (1)	
f) Für die Funktionsvariable wurde die Zahl 4 eingesetzt.	☐	☐	B (1)	

[2] Eingangstest Mathematik für die Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe, in Anlehnung an: Qualitäts- und UnterstützungsAgentur - Landesinstitut für Schule (QUA-LiS NRW), SINUS Nordrhein-Westfalen, Projekt M2 - Unterrichtskonzepte für den Übergang von der Sek I zur Sek II mit Blick auf die Anforderungen im Zentralabitur, 2011 (http://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front_content.php?idart=3198&matId=2479, zuletzt aufgerufen am 10.05.2016)

M 1 Eingangstest Funktionen – Blatt 7

F11	Korrektur	
Im Folgenden ist der Verlauf des Deutschen Aktien Indexes (DAX) in der Zeit von 1988 bis 2009 dargestellt.		
 Was können Sie aufgrund des Graphen über den Verlauf des DAX aussagen?	ZuV (2) KoV (2) ObV (2)	

F12	Korrektur		
Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte A, B, C und D.			
	A (|) B (|) C (|) D (|)	ZuV (5)	

I/C

M 2 Items des Eingangstests

Übersicht über die Items des Eingangstests mit Angabe der getesteten Bereiche:

In der Tabelle sind Informationen zum Basiswissen, welches durch die Items des Eingangstests überprüft wurde, sowie zum Entwicklungsstand der drei Grundvorstellungen **ZuV**, **KoV** und **ObV** dargestellt.

Durch die Bepunktung wird je Item deutlich, welcher Bereich getestet wird bzw. wie die Gewichtung bezüglich sich überschneidender Bereiche vorgenommen wird.

<u>Abkürzungen:</u>

B - Basiswissen

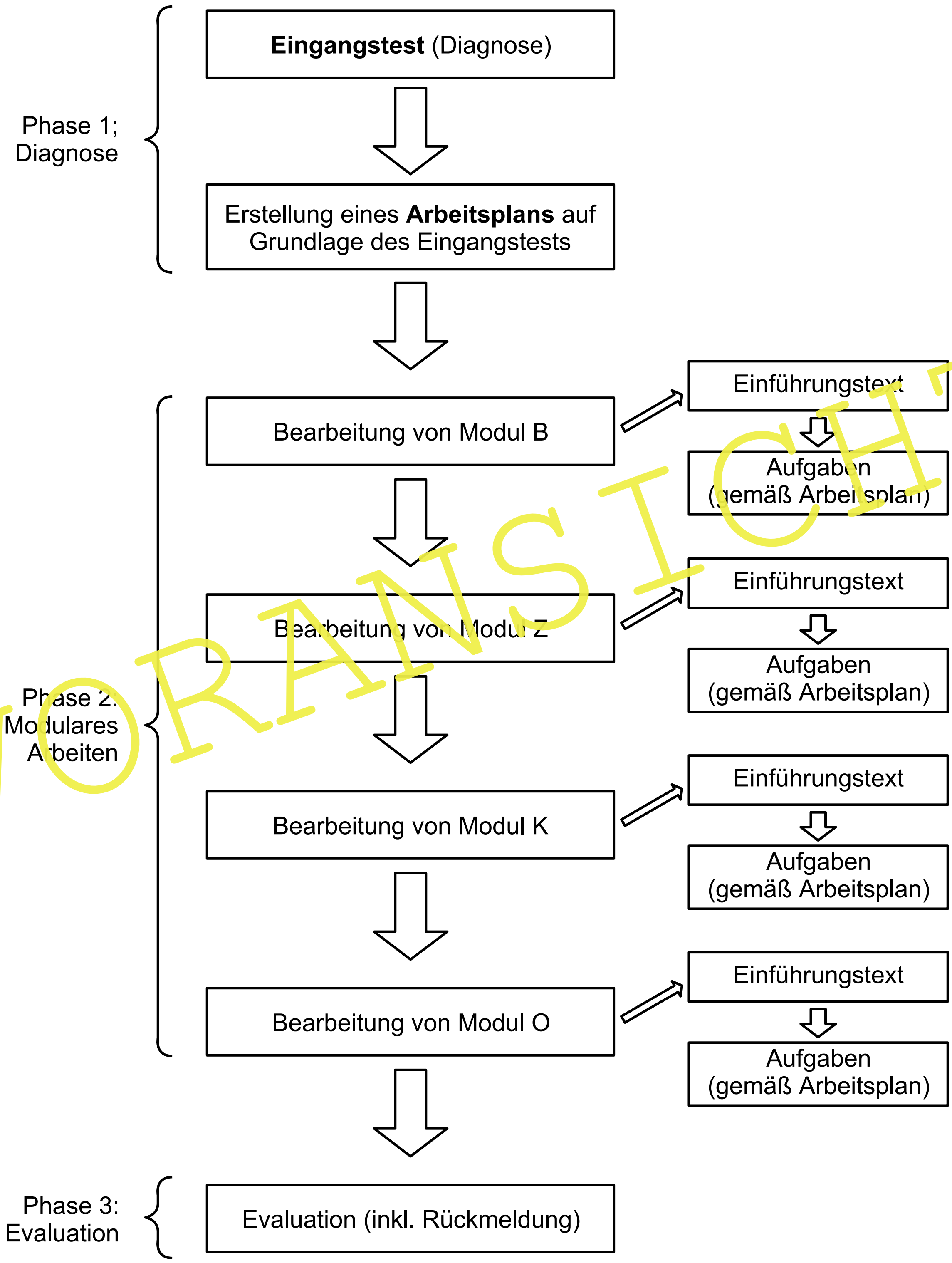
ZuV – Zuordnungsvorstellung

KoV – Kovariationsvorstellung

ObV – Objektvorstellung

Item		**Getestete Grundvorstellungen (mögliche Punktzahl)**			
		B	ZuV	KoV	ObV
F1	a	3			
	b	5			
F2	a	1			
	b	1	1		
	c		1	2	
	d	2			2
	e	2			
	f	1	1		
	g	1			
	h	1			
	i	1			
	j	1			
	k	1			
F3	a		2		
	b	2			
	c		1	2	1
	d		1	2	1
	e		1	1	2
F4	a	2	1		
	b		2		
	c	2			
	d	2	1		
	e	1	2		
	f	1			
F5		4	2		2
F6			3	3	
F7			3	3	1
F8	a		4		
	b	2	2		
	c	1	2		
F9	a		2	2	2
	b		4		
	c			6	
F10	a			4	
	b		2	2	
	c		2	2	2
F11			2	2	2
F12			5		

M 4 Übersicht über den Aufbau des Konzepts



Darstellungen von Funktionen

Verbale (sprachliche) Darstellung

Der Seitenlänge des Quadrats wird der Flächeninhalt des Quadrats zugeordnet.

Kurzform:

Seitenlänge (in cm) ⟶ Flächeninhalt in cm^2

Algebraische Darstellung

Zuordnungsvorschrift:

$x \longrightarrow x^2$ (Jedem Wert x wird der Funktionswert x^2 zugeordnet.)

Funktionsgleichung:

$y = x^2$ oder

$f(x) = x^2$

(Die Funktion f ordnet jedem Wert x seinen Funktionswert x^2 zu.)

Funktionsterm:

x^2 (stellt nur den Funktionswert dar)

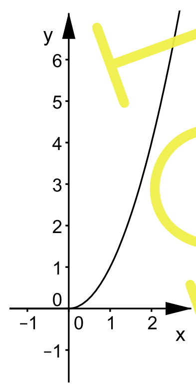
Tabellarische Darstellung

In einer Wertetabelle werden die Funktionswerte zu bestimmten Stellen notiert.

x	0	1	2	3
f(x)	0	1	4	9

Graphische Darstellung

Die Zuordnung zwischen den Werten der Ausgangsgrößen (Stellen) und den Funktionswerten wird durch einen **Graphen** dargestellt.



Darstellung als Diagramm

Als Säulen- oder Balkendiagramm, als Kreisdiagramm, etc.

Lösungen zu den Aufgaben von Modul B

1. a) (1) Der Zeit (in Min) wird der Weg (in Metern) zugeordnet.

   Sprachliche Alternative: Der Weg (in Metern) wird der Zeit (in Min) zugeordnet.

   (2) Jedem Läufer wird eine Zeit zugeordnet.

   Sprachliche Alternative: Die Zeit wird dem Läufer zugeordnet.

   (3) Der erreichten Punktzahl wird die Prozentzahl zugeordnet.

   Sprachliche Alternative: Die Prozentzahl wird der erreichten Punktzahl zugeordnet.

b) (1) Ort $\longrightarrow$ Durchschnittstemperatur
   (2) Produkt $\longrightarrow$ Preis
   (3) Zeitpunkt $\longrightarrow$ Niederschlagsmenge

   (Achtung: immer überlegen, wem (Ausgangsgröße) etwas zugeordnet wird; auch sprachlich aufpassen. Links vom Zuordnungspfeil steht immer die Ausgangsgröße!)

2. Nur die Graphen in a), c), d) und g) sind Graphen einer Funktion, da sie jedem x-Wert der Definitionsmenge genau einen Funktionswert (auch y-Wert genannt) zuordnen.

   In den übrigen Fällen gibt es Stellen (x-Werte), denen mehr als ein y-Wert zugeordnet wird. Zum Beispiel im Fall e). Dort werden dem x-Wert, welcher sich 2 Einheiten rechts vom Nullpunkt befindet, gleich 3 y-Werte zugeordnet. Folglich ist die Zuordnung nicht eindeutig.

   Hinweis: Es reicht bereits aus, wenn einem einzigen x-Wert mehr als ein y-Wert zugeordnet wird, damit es sich nicht um eine Funktion handelt.

3. $f(3) = 10$

   $g(4) > g(5)$, z. B.: $g(4) = 2$, $g(5) = 1$ (anstatt 2 und 1 sind andere Werte wählbar, solange $g(4) > g(5)$)

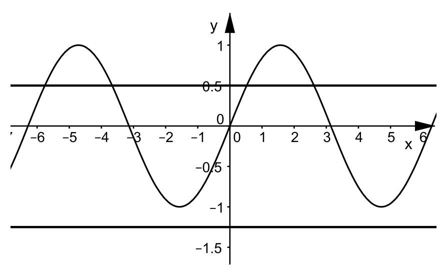
   $h(x) = c$ (c = konstant, $c \in R$; Beispiel: $c = 3$)

4. Bei Problemen mit der Lösung können Skizzen helfen!

a) <u>falsch:</u> eine Parallele zur x-Achse ordnet jedem x-Wert genau einen Funktionswert zu; dabei ordnet sie sogar allen x-Werten denselben y-Wert zu.

b) <u>richtig:</u> eine Parallele zur y-Achse an einer Stelle x_0 ordnet diesem x_0 unendlich viele Werte zu. Die Zuordnung ist daher <u>nicht</u> <u>eindeutig</u>, also keine Funktion.

c) falsch, siehe Grafik:



d) richtig, siehe Basiswissen.

5. a) Jeder Zahl wird das Doppelte der Zahl zugeordnet.

b) Jeder Zahl wird die Differenz aus dem Siebenfachen der Zahl und 3 zugeordnet.

c) Jeder Zahl wird die Summe aus ihrem Quadrat und 1 zugeordnet.

6. Der zurückgelegten Strecke (in km) wird die Höhe in Höhenmetern zugeordnet.

   Ich würde den Graphen bevorzugen, da hierauf gut zu erkennen ist, wo es steil bergauf geht. Der Tabelle sind Informationen zum Anstieg nicht zu entnehmen.

   (Man sieht hieran gut, dass die Darstellung als Graph <u>hier</u> die sinnvollste und hilfreichste ist. Die Tabelle wäre unter einer anderen Fragestellung wiederum die vermeintlich beste, da sie exakte Informationen zu bestimmten Streckenpunkten liefert, die der Graph nicht liefert, da man hierfür Punkte und Koordinaten nur ungenau ablesen kann.)