Inhaltsübersicht Grundwerk RAAbits Mathematik

Liebe Lehrerin, lieber Lehrer,

das vorliegende Grundwerk enthält eine Auswahl von Beiträgen, die bisher erschienen sind. Mit dem Grundwerk RAAbits Mathematik erhalten Sie folgende Inhalte:

Vorwort

Hinweise zur Benutzung

Verzeichnis der Ergänzungslieferungen

Erklärung CD-Icon

bedeutet:

Hier gibt es – zusätzlich zur Worddatei des Beitrags – **digitales Zusatzmaterial**.

Teil I: Sekundarstufe 1

Inhaltsübersicht

CD-ROM

[illegible] Beiträge finden Sie auch in Word-Format auf der beiliegenden CD-ROM. Verändern Sie [illegible]eitsmaterialien so, wie es zu Ihrer momentanen Unterrichtssituation passt.

Verzeichnis über das digitale Zusatzmaterial auf der CD-ROM

Teil I: Sekundarstufe 1

Signatur	Zusatzmaterial
I/C Reihe 44	GeoGebra-Dateien
I/D Reihe 42	Word-Dateien, unter anderem Beweisvorlagen und Mediathek
I/D Reihe 45	GeoGebra-Dateien
I/E Reihe 13	Excel-Datei Luegendiagramme.xls
I/G Reihe 18	GEONExT-Dateien, Excel-Tabellen, Tondateien

Teil II: Sekundarstufe 2

Signatur	Zusatzmaterial
II/A Reihe 10	Ordner Huhn (**Java-Applet**)
II/A Reihe 13	GeoGebra-Dateien
II/B Reihe 6	Verschiedene Schatten (Folienvorlagen), GeoGebra-Simulation
II/C Reihe 4	Excel-Datei Stochastik.xls
II/C Reihe 6	Schülerlösung zu M 1
II/C Reihe 7	4 Exceldateien

Teil III: Fachübergreifender Unterricht

Signatur	Zusatzmaterial
III/A Reihe 12	Eine Reise zu den Maya (Folienvorlagen) Maya-Memory, Maya-Domino, Vorlage für ein Rechenbrett und Sudoku (schwierige Variante für Experten)

Teil IV: Unterrichtsmagazin

Signatur	Zusatzmaterial
Einzelstunden für die Sekundarstufe 1	
IV/A Einzelstd. 64	Drei Kreisdiagramme (Excel-Dateien)
IV/A Einzelstd. 66	Excel-Datei Rechentraining.xls
Einzelstunden für die Sekundarstufe 2	
IV/A Einzelstd. 59	Ein **Java-Applet** zum Umschüttvorgang
Einzelmaterialien für die Sekundarstufe 1	
IV/B Einzelmat. 25	Spielplan zu Trigo-Toe (A3-Seite)
IV/B Einzelmat. 49	Excel-Datei zur Berechnung des Schnittpunkts zweier Geraden
Einzelmaterialien für die Sekundarstufe 2	
IV/B Einzelmat. 39	Berechnung der Integrale mit DERIVE

Urlaub! – Mathematisch modellieren am Beispiel von „Zuordnungen“

Dr. Christina Bauer, Patrick Schocher, Karoline Wiens

Der Stationenzirkel in der Durchführung

Klasse:	7/8
Dauer:	8–9 Stunden
Inhalt:	**Mathematische Kompetenzen** erwerben und am Thema **„Zuordnungen“** anwenden
Ihr Plus:	Selbstständiges Erarbeiten der Teilkompetenzen des Modellierens sowie ansprechende Gestaltung durch Alltagsnähe

Dieser Stationenzirkel gibt Ihren Schülern die Möglichkeit, spielerisch die abstrakten Kompetenzbegriffe des Modellierungskreislaufes zu verstehen, zu verinnerlichen und auf das Thema „Zuordnungen“ anzuwenden. Motivierender Kontext ist eine Urlaubsreise.

Auf einen Blick

Einstieg

Material	Thema	Stunde
M 1 (Einstieg)	**Eine Traumreise** Einführung in den Kontext des Stationenzirkels	1.
M 2	**Kontrollpass für den Stationenzirkel „Traumreise“**	

Stationenzirkel

Station	Thema	Stunde
1	**Die Erkundung der Insel – Übersetzen** Übersetzen zum Kennenlernen	1./2.
	Analyse der Kompetenz und Übung Anwendung und eine fachübergreifende Aufgabe	
2	**Eine geheimnisvolle Flaschenpost – Verarbeiten** Hinführen zum Lösen von Aufgaben	3./4.
	Analyse der Kompetenz und Übung Anwendung und eine fachübergreifende Aufgabe	
3	**Urlaubplanung für die [illegible]nte – Interpretieren** Auf Schnupperkurs mit dem Interpretationsvorgang	5./6.
	Analyse der Kompetenz und Übung Anwendung und fachübergreifende Aufgaben	
4	**Pooldesaster und Übergepäck – Bewerten** Hinführung zum Bewerten	7.
	Analyse der Kompetenz und Übung Anwendung und fachübergreifende Aufgaben	
5 (Fo)	**Zu Hause – Durchlauf des Modellierungskreislaufs** Vernetzung der einzelnen Teilkompetenzen	8.

Abschluss der Unterrichtseinheit

Material	Thema	Stunde
M 3	**Übersichtlich zusammengefasst – der Eintrag ins Lerntagebuch** Ende des Stationenzirkels (Zusammenführung des Kreis-laufes)	HA
M 4 (LEK)	**Aufgaben aus der Praxis – Lernerfolgskontrolle** Ein Klausurvorschlag als Abschluss der Einheit „Modellieren mit Zuordnungen“	9.

Fo ≙ Folienvorlage, HA ≙ Hausaufgabe

M 1 Eine Traumreise

Schließe bitte die Augen. Nimm eine angenehme Position auf deinem Stuhl ein und versuche, dich auf die Übung einzulassen. PAUSE

Wenn Du die Augen geschlossen hast, möchte ich dich auf eine kleine Reise mitnehmen. Stell dir vor, es ist der erste Tag der Sommerferien. Vielleicht bist du etwas aufgeregt, weil du endlich mit deiner Familie in Urlaub fährst. Stell dir vor, dass eine traumhaft schöne Insel das lang ersehnte Ziel ist.

© Sebianna/pixelio.de

Test Loading am Frankfurter Flughafen

Deine Reise beginnt in eurem Auto auf dem Weg zum Frankfurter Flughafen. Von Weitem erblickst du den gigantisch großen Flughafen. Vielleicht kannst du ein Flugzeug aus der Nähe erkennen, das gerade über die Startbahn wegfährt und gleich zum Abflug ansetzt. PAUSE

In Frankfurt angekommen, checkst du mit deiner Familie ein. Anschließend genießt du die verbleibende Zeit im Flughafen. Vielleicht gehst du zu einem Duty-free-Shop und testest mit deinen Geschwistern Parfüm, vielleicht kaufst du dir am Kiosk eine Zeitung, oder du genießt den Ausblick auf die vielen Flugzeuge, die gerade be- und entladen werden. Dann hörst du eine Stimme, die verkündet: „Der Flug 5764 fliegt in 10 Minuten ab. Bitte steigen Sie ins Flugzeug ein.“ Schnell machst du dich mit deiner Familie auf den Weg zum Flugzeug und steigst ein. Der Flug ist ein wenig holprig, aber nach einiger Zeit setzt ihr am Flughafen deiner Trauminsel auf dem Boden auf. PAUSE

Du wachst langsam wieder auf, öffnest die Augen und bist auf der Trauminsel angekommen! Von oben hast du bei der Landung schon die schönen Strände gesehen.


© Thinkstock/Fuse

Auf der Trauminsel

Anmoderation des Stationenlernens

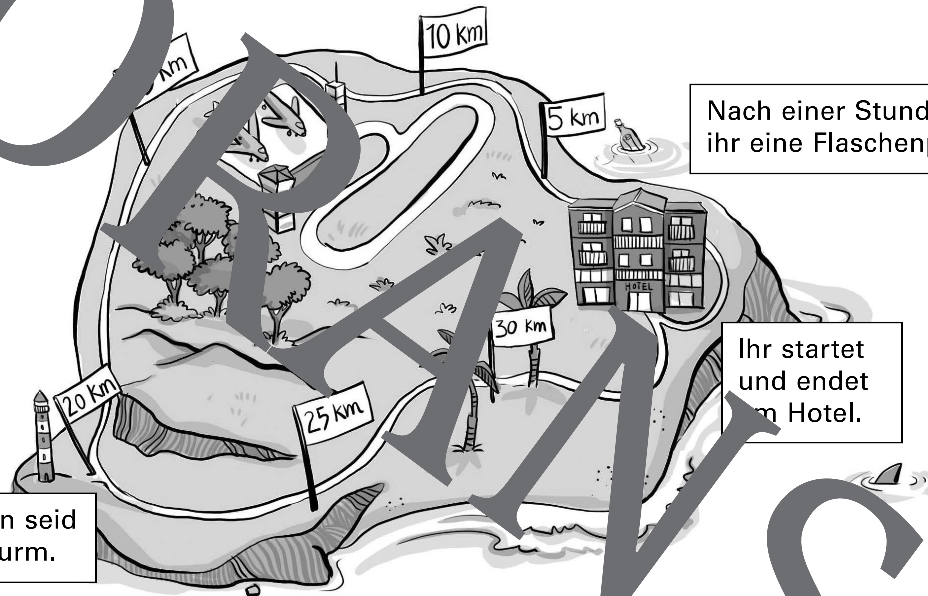
Einige Minuten später seid ihr nun endlich mit eurem Gepäck aus dem Flughafen draußen, und dein Vater hat schon das erste Problem.

Station 1 – Die Erkundung der Insel – Übersetzen

Du erkundest gemeinsam mit deiner Familie zu Fuß die Insel.


Leuchtturm

© Thinkstock/iStock, Digital



Nach einer Stunde findet ihr eine Flaschenpost.

Ihr startet und endet im Hotel.

Nach 4 Stunden seid ihr am Leuchtturm.


Die Flaschenpost

© Thinkstock/iStock, Shaiith


Matrose in Not

© Thinkstock/Stockbyte, Getty Images

Aufgabe 1: Hinführung

a) Zeichne einen Graphen mit der gelaufenen Strecke [in km] als Ausgangsgröße und der vergangenen Zeit [in h] als zugeordneter Größe. Wähle geschickte Einteilungen für die x-Achse und y-Achse. Nimm an, dass ihr gleichmäßig lauft und keine Pausen macht.

Tipp Fertige in deinem Heft eine **Wertetabelle** nach folgendem Muster an.

x: gelaufene Strecke [in km]	5	10	15	20	25	30
y: vergangene Zeit [in h]	1			4		

b) Überlege dir, ob du den Graphen durchzeichnen kannst. Begründe deine Antwort.

Die Erkundung der Insel – Übersetzen (Fortsetzung)

Aufgabe 2: Erarbeitung

a) Lies dir den Info-Text zum Übersetzen in die Sprache der Mathematik genau durch und unterstreiche wichtige Wörter. Es gibt verschiedene Teilkompetenzen des Modellierens, die du in den einzelnen Stationen kennenlernen wirst. Wir beginnen mit dem Übersetzen, der ersten Teilkompetenz.

> **Info zum Übersetzen:**
>
> Übersetzen ist das Übertragen einer realen Situation in ein mathematisches Konzept.
>
> Dieser Schritt ist der erste, den du bei einer Anwendungsaufgabe (oder einer Textaufgabe) machen musst. Entnimm der Aufgabenstellung wichtige Schlüsselwörter. Versuche, diese in einen passenden mathematischen Zusammenhang zu übersetzen.
>
> **Tipp**
>
> Als Hilfestellung kannst du dir aufschreiben, was gegeben und was gesucht ist. Bei diesem Schritt helfen dir auch eine Tabelle, informative Figuren etc.

b) Hier sind einzelne Schnipsel. Stelle sie zu sinnvollen Fragen zusammen, die dir beim Übersetzen helfen können.

Tipp

Schneide sie aus und klebe sie in dein Heft.

Welche	und	alle Informationen	sind	im Text	Brauche ich
gegeben	was	welche?	mir	fehlen	gesucht?
Was	ist	oder	vorhanden?	mathematischen Informationen	

Aufgabe 3: Vertiefung

Nach eurer Inselerkundungstour seid ihr endlich wieder am Hotel angekommen, und das sogar rechtzeitig zum Abendessen! Zwei Gerichte stehen heute auf dem Plan: Nudeln mit Sauce Bolognese und Nudeln mit Sahnesoße. Der Koch plant pro Tag 6000 g Nudeln für seine Gäste. Im Speisesaal befinden sich 20 Personen.

a) Beantworte die in Aufgabenteil 2 b) gefundenen Fragen.

b) Wie ändert sich die Masse an Nudeln pro Person, wenn die Anzahl der Gäste variiert?

Tipp

Schreibe deine Antwort in einem „ Je mehr ..., desto ...“-Satz auf.

Um welche Zuordnungsart (proportional/antiproportional) handelt es sich?

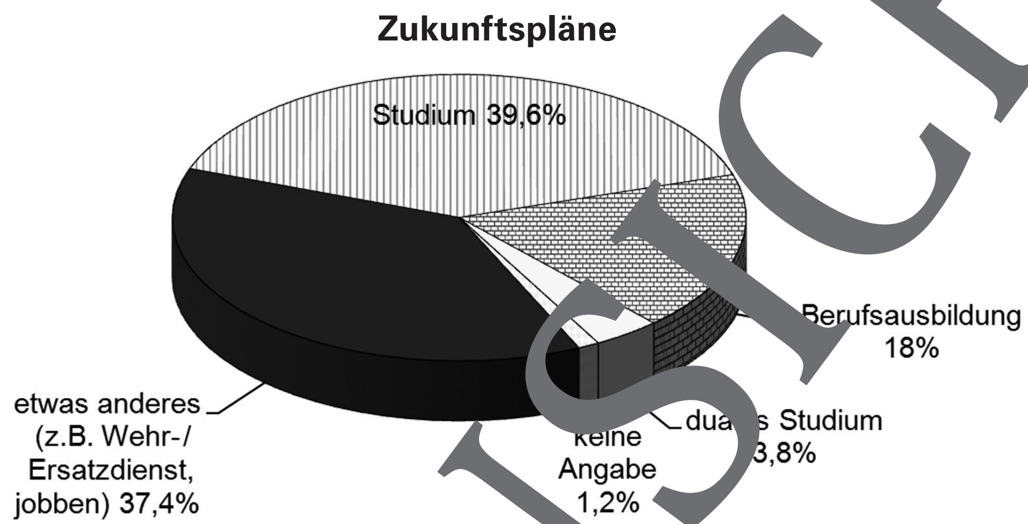
c) Erstelle die zugehörige Rechenvorschrift (Angaben in g).

d) Prüfe deine Rechenvorschrift für 3, 6, 12, 20, 30 Personen.

Lügen im Unterricht?
Ja klar – aber nur mit Säulen- und Kreisdiagrammen!

Christian Hering, Berlin

Was tust du im Herbst nach dem Abitur?



Quelle: www.axtimwal.de (Daniel Wagner)

Mehr als ein Drittel der Abiturienten beg... nach der Schule nicht gleich eine Berufsausbildung oder ein Studium (Grafik [zitiert] aus FOCUS Nr. .../2008).

I/E

Klasse	7 bis 9
Dauer	5 – 6 Stunden
Inhalt	Säulen- und Kreisdiagramme erstellen, Denkfallen aufdecken, begreifen, wie durch irreführende Darstellung statistischer Daten (bewusst) eine falsche Aussage suggeriert wird, den kritischen Umgang mit grafischen Darstellungen schulen
Ihr Plus	Handlungsorientierung, Tippkarten für individuellen Lernfortschritt, Gruppen- und Partnerarbeit mit Selbstverantwortung

Mathe ist dröge! In Mathe gibt's nur *richtig* oder *falsch*! Und Mathe hat überhaupt nichts mit der Wirklichkeit zu tun! Dass dies nicht der Fall ist, zeigt diese Unterrichtsreihe. Denn hier entdecken Ihre Schülerinnen und Schüler, wie unterschiedlich und zum Teil irreführend statistische Daten in Säulen- und Kreisdiagrammen dargestellt werden können.

Das Motto *Lügen mit Statistik* motiviert die Schülerinnen und Schüler, ihre Klassenkameraden (und vielleicht auch den Lehrer) aufs Glatteis zu führen – wann dürfen sie das sonst in der Schule? Trotzdem arbeiten sie die ganze Zeit auf hohem mathematischen Niveau. Sie beurteilen, ob ein Diagramm die Daten angemessen darstellt. Falls nicht, finden sie heraus, woran es liegt, dass man dem Diagramm eine falsche Aussage entnimmt. Und sie erstellen selbst Diagramme, die eine gegebene Aussage nahelegen.

Der Alltagsbezug der Aufgaben macht den Schülerinnen und Schülern bewusst, dass Statistik tatsächlich etwas mit dem „Leben da draußen" zu tun hat. Dies motiviert sie, sich mit ihr zu beschäftigen. Sie bringen ihre Fantasie und Kreativität in den Unterricht ein.

Didaktisch-methodische Hinweise

Begründung des Themas

„Statistik ist für mich das Informationsmittel der Mündigen. Wer mit ihr umgehen kann, kann weniger leicht manipuliert werden.“ Dies hat Elisabeth Noelle-Neumann, Meinungsforscherin und Gründerin des Instituts für Demoskopie Allensbach, über ihr Haupttätigkeitsfeld gesagt. Unser prinzipielles Grundvertrauen, das wir der grafischen Darstellung statistischer Daten entgegenbringen, sollten wir also mit einer nötigen Portion Skepsis versehen. Denn tatsächlich lassen sich regelmäßig Diagramme in der Öffentlichkeit finden, die die Tatsachen verfälschen, ja sogar mathematisch falsch sind. Wenn wir unsere Schülerinnen und Schüler zu einem mündigen Teil unserer Gesellschaft erziehen wollen, muss der Statistikunterricht auch den Aspekt *Manipulieren und Lügen mit Statistik* berücksichtigen.

Nur ein Unterricht in diesem Sinn wird auch aus rein mathematischer Sicht der Leitidee *Daten und Zufall* gerecht. Beschränkt sich der Statistikunterricht auf das Zeichnen von Diagrammen, ein bloß aktionistisches Durchführen von Umfragen und das simple Berechnen von Mittelwerten, so ist das zu wenig, denn dies können Computer wesentlich besser. Erst im bewussten Interpretieren, situationsbezogenen Anpassen und der absichtsgeleiteten Wahl einer bestimmten Diagrammform zeigt sich mathematische Kompetenz.

In der vorliegenden Reihe zum Thema *Lügen mit Statistik* treffen also fachliche Bedeutung und Alltagsrelevanz zusammen – und das in einer die Schülerinnen und Schüler motivierenden Form.

Methodisches Grundprinzip

Um die Schülerinnen und Schüler zu einer intellektuellen Auseinandersetzung mit statistischen Diagrammen zu bewegen, reichen lebensnahe Aufgaben alleine nicht aus. Lernen sie an realitätsbezogenen Aufgaben nur die Anwendung bestimmter Regeln und die Durchführung festgelegter Algorithmen, so können sie nicht erfahren, wie es ist, selbst durch ein Diagramm getäuscht zu werden oder gar jemand anderen zu täuschen. Nur diese Erfahrung sichert den Lernerfolg langfristig – mit der Konsequenz, dass die Lernenden bewusster mit grafischen Darstellungen im Alltag und Mathematikunterricht umgehen.

Daher ist die *Handlungs- und Produktorientierung* das grundlegende Prinzip dieser Reihe. Der selbstständig handelnde Umgang mit bestimmten Situationen, zugehörigen Daten und deren sinnvoller und angebrachter Darstellung ermöglicht individuelle Erfahrungen im Lernprozess. Die Handlungsorientierung fokussiert den Aspekt des Ausprobierens. Gerade beim Erstellen von Diagrammen, die eine bestimmte Aussage machen sollen, ist es unabdingbar, die vorläufigen Ergebnisse ständig zu überprüfen. Die Produktorientierung ermöglicht es, dass sich die Lernenden mit den Ergebnissen, die sie präsentieren, identifizieren, was besonders individuelle Lernwege und die Vielfalt der möglichen Ergebnisse fördert.

Handlungs- und Produktorientierung lässt sich in der Regel gut durch Gruppen- und Partnerarbeitsprozesse erzielen. Durch den hohen Grad an Kommunikation in Schülergruppen erreicht man eine wirkliche kognitive Auseinandersetzung mit Diagrammen und deren Machart: Es wird darüber diskutiert, warum dieser oder jener Weg besser sein könnte, warum welche Darstellungsform am ehesten der Situation entspricht etc..

Auf einen Blick

Wiederholung: Kreis- und Säulendiagramme erstellen und lesen können (eine Doppelstunde)

Material	Thema	Checkliste
M 1	**Bist du ein Stubenhocker? – Daten erheben und auswerten** Statistische Daten erheben und auswerten, die Daten dazu in verschiedenen Diagrammen darstellen	Zirkel ggf. Tabellenkalkulation im PC-Raum nutzen
M 2	**Stinkt Deutschland bald zum Himmel? – Diagramme lesen** Die Aussagekraft der beiden Diagrammtypen *Kreis- und Säulendiagramm* vergleichen und bewerten	

Mit Säulendiagrammen lügen (circa zwei Stunden)

Material	Thema	Checkliste
M 3	**Die Zahl der Mitglieder stagniert, oder etwa nicht?** Motivierender Einstieg [illegible] Säulendiagrammen	M 3 auf Folie kopieren Diagramme und Aussagen als Folienschnipsel ausschneiden
M 4	**Traue keiner Statistik, die du nicht selber gefälscht hast!** Mit den gleichen Daten [illegible] durch die Darstellung drei verschiedene Aussagen vermitteln	mindestens 6 Posterbögen (mindestens A3) ausreichend Eddings, Tafelmagnete und/oder Kreppband zum Befestigen Tippkarte bereitstellen ggf. Tabellenkalkulation im PC-Raum nutzen
M 5	**Was haben die anderen gemacht? – Ein Vergleich** [illegible] Ergebnisse sichern, Rückbezug des Gelernten auf M 3	

Mit Kreisdiagrammen lügen (ein bis zwei Stunden)

Material	Thema	Checkliste
M 6	**Mehrheit für Jogi Löw – mit Kreisdiagrammen lügen** Für Experten: Fast jeder zweite Berliner lebt allein! Zwei verschiedene Möglichkeiten der Fehldarstellung kennenlernen	Tippkarten bereithalten, Zirkel

Minimalplan

Beschränken Sie sich auf die Behandlung der Säulendiagramme. Motivieren Sie das Thema mit der Folie M 3, lassen Sie die Schülerinnen und Schüler ein und dieselben Daten so darstellen, dass sie verschiedene Aussagen suggerieren (M 4), und vergleichen Sie die Ergebnisse (M 5).

I/E

M 1 Bist du ein Stubenhocker? – Daten erheben und auswerten

Evelyn führt für die Schülerzeitung *Neues von der Penne* eine Umfrage durch.

Aufgabe

Hilf ihr. Beantworte die folgenden drei Fragen:

a) Wie kommst du normalerweise zur Schule?

Folgende fünf Antworten sind möglich:

zu Fuß – mit dem Fahrrad – mit dem Bus – mit der U- oder S-Bahn – anders

b) Wie viele Geschwister hast du?

Folgende fünf Antworten sind möglich:
0 – 1 – 2 – 3 – 4 oder mehr.

c) Wie viele Stunden verbringst du am Tag vor dem Fernseher oder Computer?

Folgende fünf Antworten sind möglich:

0 bis 1 – 1 bis 2 – 2 bis 3 – 3 bis 4 – 4 oder mehr

Bist du ein Stubenhocker?

Tipp

Drei Interviewer sammeln die Daten an der ...
Dazu legen sie pro Frage jeweils eine **Strichliste** an.

Nun muss Evelyn die Daten noch auswerten. Unterstützt du sie? Zähle die Striche zusammen und stelle die Ergebnisse in einem Kreis- oder Säulendiagramm dar.

Tipps **Wie gehst du bei der Auswertung der Umfrage vor?**

1. Lege im Heft eine Tabelle mit folgenden vier Spalten an:

   Antwort – Absolute Häufigkeit – Relative Häufigkeit als Bruch – Relative Häufigkeit in Prozent

2. Fülle die Tabelle mithilfe der Strichliste aus.

   Die *absolute Häufigkeit* einer Antwort ist gleich der Anzahl der Striche dieser Antwort. Die *relative Häufigkeit* einer Antwort ist der Anteil der Striche für diese Antwort an der Gesamtheit aller Striche.

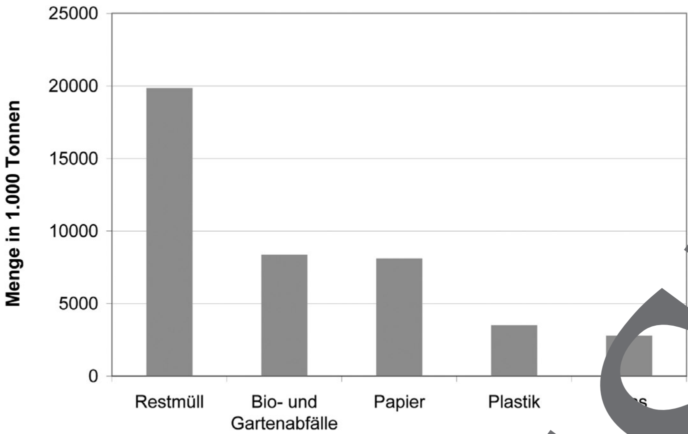
3. Stelle nun jeweils die *absoluten* Häufigkeiten in einem **Säulendiagramm** und die *relativen* Häufigkeiten in einem **Kreisdiagramm** dar.

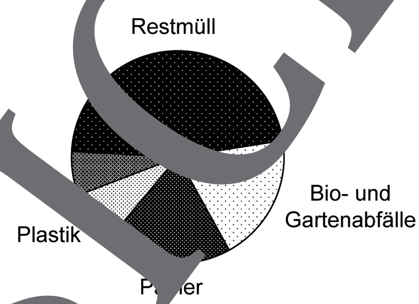
   Beim Säulendiagramm gibt die y-Achse die *Anzahl der Schüler* an, die diese Antwort gegeben haben. Achte auf einen geeigneten Maßstab. Überlege beim Kreisdiagramm, wie man aus den Prozentsätzen die Größe der jeweiligen *Kuchenstücke* erhält (betrachte die Winkel der Kuchenstücke). Nimm beim Zeichnen einen Zirkel zu Hilfe.

4. Finde zu jedem der beiden Diagramme zwei *Schlagzeilen*. Sie müssen besonders gut zu dem jeweiligen Diagramm passen. Schreibe die Schlagzeilen über die Diagramme.

M 2 Stinkt Deutschland bald zum Himmel? – Diagramme lesen

Ernst Eilig ist Zeitungsreporter. Ihn interessiert, wie viel Müll die deutschen Haushalte im Jahr 2009 produziert haben. Deshalb bittet er das Statistische Bundesamt um Information. Neben einem freundlichen Schreiben erhält er die folgenden beiden Grafiken.





Quelle: Hochrechnung der verfügbaren Daten des Statistischen Bundesamts

Aufgabe

a) Das Säulendiagramm versieht Herr Eilig mit der folgenden Schlagzeile: *Fast 20 000 000 Tonnen Restmüll in Deutschland, aber weniger als 5000 Tonnen Plastikmüll!*

Warum ist diese Aussage falsch?

Welche entscheidende Angabe fehlt im Kreisdiagramm?

b) Hilf Herrn Eilig. Finde sechs Aussagen über das Müllproblem in Deutschland. Überlege, zu welchem Diagramm deine Aussagen eher passen, zu dem **Säulendiagramm** oder zu dem **Kreisdiagramm**? Gibt es auch Aussagen, die zu beiden Darstellungen passen?

Tipp Lege in deinem Heft eine Tabelle *Schlagzeilen* mit den Spalten *Zum Säulendiagramm* und *Zum Kreisdiagramm* an. Trage deine Aussagen als *Schlagzeilen* in die jeweilige Spalte ein.

Zustände wie in Neapel

Merke:

Das Säulendiagramm stellt *absolute* Häufigkeiten, das Kreisdiagramm dagegen *relative* Häufigkeiten dar.

M 4 Traue keiner Statistik, die du nicht selber gefälscht hast!

Die Pizzeria *Bella Napoli* hat die Preise für ihre Pizzen in den letzten Jahren immer wieder anpassen müssen, da die Kosten für Miete, Personal und Zutaten Jahr für Jahr gestiegen sind.

Die folgende Tabelle gibt den durchschnittlichen Preis für eine Pizza in den Jahren 2005 bis 2009 wieder:

Jahr	2005	2006	2007	2008	2009
Preis	4,30 €	4,40 €	4,65 €	4,90 €	5,10 €

Gruppenarbeit

Stellt die Daten auf einem Poster in einem Säulendiagramm dar. Dabei soll die folgende Aussage für den Betrachter glaubhaft sein:

Die Pizzapreise bei *Bella Napoli* sind …

… seit Jahren gleichbleibend sehr niedrig. (Gruppe A)

… seit Jahren gleichbleibend sehr hoch. (Gruppe B)

… in den letzten Jahren stark gestiegen. (Gruppe C)

So geht's

1. Erstelle zunächst allein in deinem Heft eine Skizze deiner Lösungsidee. Kommst du auf gar keine Idee, kannst du am Lehrertisch auf eine Tippkarte spicken.

   Die x-Achse des Säulendiagramms soll [illegible] cm lang sein, und die fünf Säulen müssen einen gleichmäßigen Abstand haben. Die y-Achse soll 8 cm lang sein.
2. Diskutiert in der Gruppe über die verschiedenen Lösungsideen und entwickelt eine gemeinsame Lösung.
3. Zeichnet das Diagramm auf ein Poster. Verseht es mit einer Überschrift im Stil einer Zeitungsschlagzeile, um dadurch die Aussage zu verstärken.
4. Schreibt im Heft stichpunktartig auf, wie ihr vorgegangen seid, um euer Diagramm in der gewünschten Form zu erhalten. Bereitet euch darauf vor, dass jeder von euch dem Rest der Klasse erklären kann, wie er vorgegangen ist.

✂

Tippkarte

Gruppe A: Wie müsst ihr die Pizzapreise auf der y-Achse eintragen, damit alle Säulen des Diagramms nicht zu hoch werden?

Gruppe B: Wo müssen der höchste und der niedrigste Pizzapreis auf der y-Achse liegen, damit die Säulen des Diagramms alle ungefähr gleich und sehr hoch sind?

Gruppe C: Ein Trick: Die y-Achse nicht bei 0 beginnen lassen! Wie müsst ihr die y-Achse einteilen, damit die Säule für den kleinsten Preis niedrig und diejenige für den größten Preis hoch wird?

I/E

Einfach optimal – Extremwertaufgaben lösen

Dr. Beate Bathe-Peters, Berlin

Foto: Dr. Bathe-Peters

Welche Maße hat das [illegible] das man mit einem 20 m langen Zaun abtrennen [illegible]?

Kl[illegible]	[illegible] und 12
[illegible]auer	[illegible] Stunden
[illegible]halt	Verschiedene Methoden, um Extremwertaufgaben zu lösen, unter anderem der Solver von Excel; Anleitung für das generelle Vorgehen hierbei; Übungen
Ihr Plus	Gruppenpuzzle, Stationenzirkel, Material zur Binnendifferenzierung

[illegible]it die[illegible] Beitrag li[illegible]fern wir Ihnen Texte, die Extremwertaufgaben enthalten. Es gilt, den [illegible]halt zu e[illegible]nd ein passendes mathematisches Modell zu finden. Dann muss man ei[illegible] geeignete Lösungsmethode wählen und das Ergebnis im Sinne der Aufgabenstellung inte[illegible]retieren. Die Aufgaben stammen aus den unterschiedlichsten Bereichen, z.B. der Astro[illegible]omie, der Schifffahrt und der Biologie.

Ne[illegible]afischen Methoden und den Werkzeugen der Differenzialrechnung kommt der Solver von Excel zum Einsatz. Dieses Tool ist sehr mächtig. Man kann damit Variationen der Ausgangsbedingungen leicht berücksichtigen.

Didaktisch-methodische Hinweise

Man muss nicht Akademiker sein oder es werden wollen, um sich mit Extremwertaufgaben auseinander zu setzen. Auch der Landwirt ist mit Fragestellungen konfrontiert, die auf eine Extremwertaufgabe hinauslaufen.

Voraussetzung der Unterrichtseinheit

Die Schülerinnen und Schüler haben die Herleitung der Sätze der Differenzialrechnung verstanden. Sie beherrschen die gängigen Argumentationen, können den Ausdruck für die Zielfunktion begründen und ihre Extremwerte mithilfe der Differenzialrechnung berechnen.

Ein mathematisches Modell formulieren – die erste Schwierigkeit

Die Problemstellung zu verstehen, die meist in Form einer Textaufgabe vorliegt, ist die erste Hürde, die die Schülerinnen und Schüler nehmen müssen. Ist aus den Informationen ein mathematisches Modell entstanden, so besteht die zweite Schwierigkeit darin, die Extremwertaufgabe zu lösen. Dies kann auf verschiedene Art und Weise erfolgen. Einfaches Experimentieren, die grafische Darstellung, die Differenzialrechnung und die Näherungsverfahren von Excel sind Möglichkeiten, die Extremwerte der Zielfunktion zu bestimmen. Die Schülerinnen und Schüler erkennen im Laufe der Einheit, wo die Stärken und Schwächen der einzelnen Methoden liegen.

Wir verdeutlichen die Vorgehensweise, wie man ein geeignetes Modell findet, anhand eines Beispiels. Sodann stellen wir verschiedene Lösungsstrategien vor und erproben sie.

Ziele der Reihe

Die Schülerinnen und Schüler können

- für Extremwertaufgaben, die in Form einer Textaufgabe vorliegen, ein geeignetes mathematisches Modell finden,
- Extremalbedingung, Nebenbedingungen und Zielfunktion aufstellen,
- ein Verfahren zur Bestimmung der Extremwerte der Zielfunktion wählen,
- die Vor- und Nachteile der unterschiedlichen Lösungsverfahren angeben,
- die Extremwerte der Zielfunktion bestimmen,
- die Ergebnisse im Sinne der Aufgabenstellung interpretieren und das Ergebnis dementsprechend formulieren.

Ablauf

M 2 bereitet die Lösung der Extremwertaufgabe *Hühnergehege* vor. **M 3** stellt den Schülerinnen und Schülern verschiedene Lösungswege für diese Aufgabe vor. Hier bietet sich ein Gruppenpuzzle, Gruppenarbeit oder ein Stationenzirkel mit anschließender Präsentation an. **M 4** behandelt die Bedingungen für das Vorliegen von Extremalstellen.

Die folgenden Materialien (**M 5 – M 8**) bearbeiten die Schülerinnen und Schüler mithilfe der Differenzialrechnung, probieren aber auch andere Lösungsmethoden aus. Hierbei müssen sie verschiedene Vorgaben beachten.

M 9 bietet speziell die Möglichkeit, mit dem Solver von Excel zu experimentieren. Die Lösungen von **M 10** kontrollieren die Schülerinnen und Schüler mit dem grafischen Taschenrechner. Achten Sie darauf, dass sie vorher schon genug Erfahrung mit dem Ableiten „von Hand“ gesammelt haben, sodass sie dieses Hilfsmittel nur zur Kontrolle einsetzen.

M 2 Bauer Antons Hühnerhof – sich das Vorgehen klarmachen

Auf dem Bauernhof ist viel los. Damit Anton die Eier nicht auf dem ganzen Gelände suchen muss, möchte er ein Gelände vor dem Hühnerstall abtrennen, und zwar so, dass die Hühner durch eine Tür ins Innere des Hühnerstalls gelangen können. Das Gehege wird also an einer Seite durch die Wand des Stalls begrenzt. Im Schuppen findet er noch Material für einen 20 m langen Zaun. Er möchte damit ein möglichst großes Gehege abteilen.

Aufgabe

a) Verdeutlichen Sie das Problem anhand einer Skizze. Bezeichnen Sie die gesuchten Strecken mit Variablen.

b) Formulieren Sie das Problem mathematisch. Stellen Sie dazu Formeln auf.

c) Beschreiben Sie eine Methode, das Problem zu lösen.

d) Erstellen Sie eine Checkliste mit den wichtigen Schritten zum Lösen von Extremwertaufgaben.

> **Merke**
>
> Aufgaben, in denen etwas möglichst Kleines oder möglichst Großes gesucht wird, bezeichnet man als **Extremwertaufgaben**. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, sie zu lösen.
>
> Aber einige Arbeiten sind allen Lösungswegen gleich. Dazu gehört das Erstellen des mathematischen Modells und zum Schluss die Interpretation des errechneten Ergebnisses.

Fotos: Dr. Bathe-Peters

M 3 Viele Wege führen zum Ziel – ein Beispiel als Einstieg

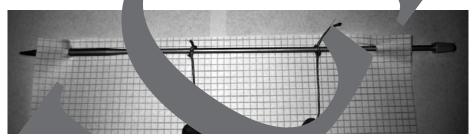
3.1 Die Maße des Hühnergeheges – die experimentelle Methode anwenden

Wenn man das Problem nicht rechnerisch lösen möchte, so geht dies auch durch einen Versuch:

Schülerversuch (zu zweit) Vorbereitung: 5 min Durchführung: 10 min

Material

- ❐ 1 Blatt Karopapier
- ❐ lange Stricknadel
- ❐ 2 Stifte
- ❐ Lineal
- ❐ mindestens 30 cm lange Schnur



Versuchsvorbereitung

Knüpfen Sie im Abstand von 20 cm (entspricht 20 m) Knoten in die Schnur. Die Stricknadel wird zuerst durch das Papier, dann durch die beiden Knoten und dann wieder durch das Papier gestochen. Sie soll dabei genau auf einer Linie liegen. Kontrollieren Sie zum Schluss den Abstand der Knoten noch einmal mit dem Lineal.

Versuchsdurchführung: Wie erhalten Sie die größte eingeschlossene Fläche?

Beachten Sie, dass immer zwei Kästchen 1 cm entsprechen (sollten Sie eine andere Einteilung verwenden, müssen Sie vorher messen und die Einheit entsprechend anpassen).

a) Spannen Sie die Schnur nun mithilfe der beiden Stifte in verschiedenen Positionen so, dass Sie den Flächeninhalt gut auszählen können. Die Stifte stechen Sie in die beiden äußeren Ecken des Hühnergeheges (vgl. Abbildung).

b) Die Stricknadel symbolisiert die Wand des Hühnergeheges.

c) Variieren Sie die Position der Stifte so lange, bis der Flächeninhalt maximal ist.

d) Nun messen Sie Länge und Breite des Geheges und lesen den zugehörigen Flächeninhalt ab.

e) Halten Sie Vorgehen und Ergebnis des Versuchs stichpunktartig in Ihrem Heft fest.

✂ — — — — — — — — — — — — — — — — — —

3.2 Die Maße des Hühnergeheges – die zeichnerische Methode anwenden

Zeichnen Sie die Zielfunktion. Dies kann entweder mithilfe einer Wertetabelle geschehen oder Sie schreiben die Zielfunktion in Scheitelpunktsform und nutzen Ihre Kenntnisse zur Lage solcher Funktionen im Koordinatensystem.

Nun lesen Sie das Ergebnis anhand des Graphen ab und bestimmen alle Variablen.

Aufgabe für Experten

a) Um welchen Funktionstyp handelt es sich bei der Zielfunktion?

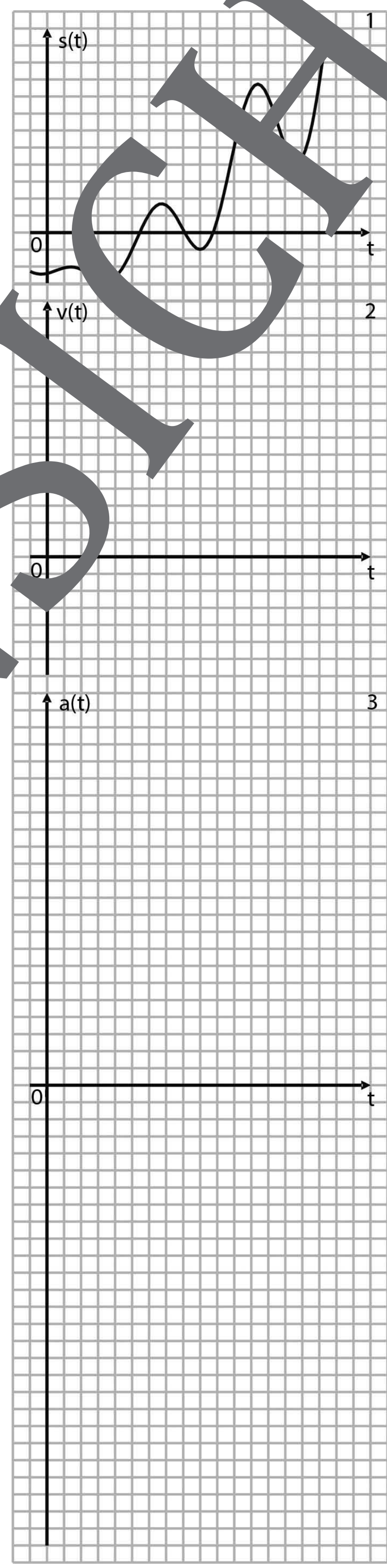
b) Welche Werte sind für die Lösung der Aufgabe sinnvoll und welche nicht?

M 4 Kein Weg ist zu beschwerlich – ein Exkurs in die Physik

Leon wohnt flussabwärts und möchte seine große Liebe Ina besuchen. Er steigt in sein Paddelboot und paddelt stromaufwärts.

An der großen Weide steht eine Wegmarke mit der Angabe 0 km. Ab dieser Stelle beginnt Leon die zurückgelegte Wegstrecke stromaufwärts positiv zu zählen.

Nebenstehend (1) ist das Weg-Zeit-Diagramm für seine Flussfahrt aufgezeichnet (y = s(t); x = t).



Aufgabe

a) Beschreiben Sie seine Fahrtstrecke.

b) Zeichnen Sie den Verlauf der Geschwindigkeit v(t) in das Diagramm 2 ein.

Tipp $\vec{v}(t) = \dot{s}(t)$

Es kommt hierbei nicht auf die genaue Höhe der lokalen Maxima und Minima an. So wurde auf eine Skalierung der y-Achsen verzichtet. Wichtig ist allein die Lage der lokalen Extrema (auch der 1. und 2. Ableitung).

Deuten Sie den Verlauf des Graphen dazwischen an. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

c) Zeichnen Sie den Verlauf der Beschleunigung a(t) in das Diagramm 3 ein.

Tipp $\vec{a}(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$

Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Lage der lokalen Extrema einer Funktion und den Nullstellen ihrer 1. Ableitung?

Äußern Sie sich zur Steigung der Funktion.

Formulieren Sie eine notwendige und eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Maximums bzw. Minimums.

Würfeln, ziehen, drehen – Glücksspiele stochastisch betrachtet

Wolfgang Göbels, Bergisch Gladbach

Roulette-Spieler Anfang des 20. Jahrhunderts

Foto: INTERFOTO

Klasse	11 und 12
Dauer	[illegible] Stunden
Inhalt	Gewinnwahrscheinlichkeit, Laplace-Experiment, Bernoulli-Experiment, Bedingte Wahrscheinlichkeit, Problem des Chevalier de Méré, Binomialverteilung, Wartezeitproblem, faires Spiel, Extremwertproblem
Ihr Plus	Excel-Datei mit zwölf Arbeitsblättern

Glücksspiele stochastisch zu betrachten, lohnt sich.

Kennt man nämlich die Wahrscheinlichkeit für die Elementarereignisse, so hat man zumindest bei einigen Spielen die Möglichkeit, mit strategischen Überlegungen seine Gewinnwahrscheinlichkeit zu erhöhen. Andere laden dazu ein, interessante Gedankenexperimente wie das Problem des Chevalier de Méré zu untersuchen.

Beim Glücksrad schätzen die Schülerinnen und Schüler zunächst die Gewinnwahrscheinlichkeit. Beim Urnenexperiment stellen sie eine Bedingung dafür auf, dass das Spiel fair ist. So unterscheiden sich die Beispiele wohltuend vom Schulbuch.

Nutzen Sie die Excel-Datei mit den zwölf zusätzlichen Arbeitsblättern!

Auf einen Blick

Die Welt des Glücksspiels

Material	Thema	Stunde
M 1	**Die Welt des Glücksspiels – damals und heute** Farbfolie als motivierender Einstieg in das Thema	1
M 2	**Erlaubt und verboten – die Entwicklung des Glücksspiels** Historische Betrachtungen zu ausgewählten Glücksspielen	

Wiederholung der elementaren Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Material	Thema	Stunde
M 3	**Wahrscheinlich erinnern Sie sich noch** Das stochastische Basiswissen festigen	2
M 4	**Die Würfel sind gefallen! – Laplace-Experimente** Zufallsexperimente untersuchen, bei denen alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben	3

Das Problem des Chevalier de Méré

Material	Thema	Stunde
M 5	**Das Problem des Chevalier de Méré** Bernoulli-Experimente vergleichen wie Méré und Pascal	4
M 6	**Mit Polyedern würfeln – eine Variante des Problems** Mit platonischen Körpern würfeln	5

Das faire Spiel und ein Extremwertproblem in der Stochastik

Material	Thema	Stunde
M 7	**Wer erzielt das „Golden Goal" am Glücksrad?** Auf den ersten Treffer warten – verschiedene Wartezeitprobleme	6
M 8	**Jedem Spieler sein eigenes Glücksrad – das faire Spiel** Faire Spiele betrachten	7
M 9	**Ziehen statt drehen – ein faires Spiel mit der Urne** Ein Urnenexperiment durchführen	
M 10	**Maximale Gewinnwahrscheinlichkeit – ein Extremwertproblem** Maximierung von Gewinnwahrscheinlichkeiten als Extremwertproblem – Querverbindungen zur Analysis	8

M 3 Wahrscheinlich erinnern Sie sich noch

Binomialkoeffizient, Erwartungswert, Varianz ...

Wie war das doch gleich? Bevor es richtig losgeht, können Sie hier Ihr stochastisches Basiswissen wiederholen.

Merke

1. Der Binomialkoeffizient

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$ heißt der **Binomialkoeffizient n über k.**

Eine n-elementige Menge hat $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ verschiedene k-elementige Teilmengen.

$\binom{n}{k}$ besitzt die Eigenschaften $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ und $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

2. Die Binomialverteilung

$B(n; p; k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem n-stufigen Bernoulli-Experiment mit Zurücklegen und mit der Trefferwahrscheinlichkeit p genau k Treffer zu erzielen. Hierbei ist n die Länge der Bernoullikette.

Die Funktion $k \to B(n; p; k)$ heißt **Binomialverteilung** mit dem **Erwartungswert** $\mu = n \cdot p$, der **Varianz** $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$ und der **Standardabweichung** $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.

Die Binomialverteilung hat die Eigenschaft $\sum_{k=0}^{n} B(n; p; k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = 1$.

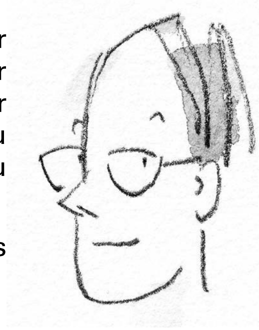
Aufgabe 1

a) Wie viele verschiedene Tippreihen gibt es beim bekannten Lotto „6 aus 49“?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, in einem Mathematikkurs mit 24 Schülerinnen und Schülern bei einer Gruppenarbeit Achtergruppen zu bilden?

Aufgabe 2

Zur Überprüfung Ihres Lernstandes gibt Ihnen Ihre Lehrerin bzw. Ihr Lehrer zu Beginn des Schuljahres einen Multiple-Choice-Test. Jeder von Ihnen bekommt einen Fragebogen mit zwölf Fragen. Zu jeder Frage gibt es fünf Antwortmöglichkeiten, wobei jeweils nur genau eine Möglichkeit richtig ist. Es darf auch zu jeder Frage nur genau eine Antwort angekreuzt werden.



Mit welcher Wahrscheinlichkeit kreuzen Sie rein zufällig wenigstens eine Frage richtig an, obwohl Sie überhaupt nicht vorbereitet sind?

M 4 Die Würfel sind gefallen! – Laplace-Experimente

Erinnern Sie sich noch an den französischen Mathematiker Pierre-Simon Laplace?

Pierre-Simon Laplace

Foto: picture-alliance/maxppp

Aufgabe 1

a) Beschreiben Sie, was man unter einem Laplace-Experiment versteht und nennen Sie einige Beispiele für Laplace-Experimente.

b) Zeigen Sie unter Anwendung der Binomialverteilung:

Die Wahrscheinlichkeit, bei $2 \cdot k$ Würfen mit einer idealen Münze (Laplace-Münze) genau k-mal Zahl zu werfen, beträgt $\frac{(2k)!}{4^k \cdot (k!)^2}$.

Aufgabe 2

Wie oft muss man einen Laplace-Würfel mindestens werfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % mindestens einmal eine Sechs zu würfeln?

Zur Differenzierung

Aufgabe 3 (leicht) ☆

a) Zeigen Sie:

Die Wahrscheinlichkeit, bei $6 \cdot k$ Würfen mit einem Laplace-Würfel genau k-mal eine Eins zu werfen, beträgt $\frac{(6k)!}{k! \cdot (5k)!} \cdot \left(\frac{5^5}{6^6}\right)^k$.

b) Für $0 < p < 1$ sei die Funktion f definiert durch $f(p) = B(6; p; 3)$.

Zeigen Sie, dass $f(p)$ für $p = 0{,}5$ maximal wird.

Tipp

f hat im Intervall $0 < p < 1$ genau ein Maximum. Dies müssen Sie nicht zeigen.

Aufgabe 4 (schwieriger) ☆☆

a) Wie oft muss man gleichzeitig drei unterscheidbare Laplace-Würfel werfen, um mit wenigstens 50-prozentiger Wahrscheinlichkeit mindestens eine Dreifachsechs zu würfeln?

b) Für $0 < p < 1$ sei die Funktionenschar $f_{n,k}$ definiert durch $f_{n,k}(p) = B(n; p; k)$.

Zeigen Sie, dass $f_{n,k}(p)$ für $p = \frac{k}{n}$ maximal wird.

Tipp

$f_{n,k}$ hat im Intervall $0 < p < 1$ genau ein Maximum. Dies müssen Sie nicht zeigen.

Testen Sie mich! – Das Testen von Hypothesen handlungsorientiert einführen

Antonius Warmeling, Hagen

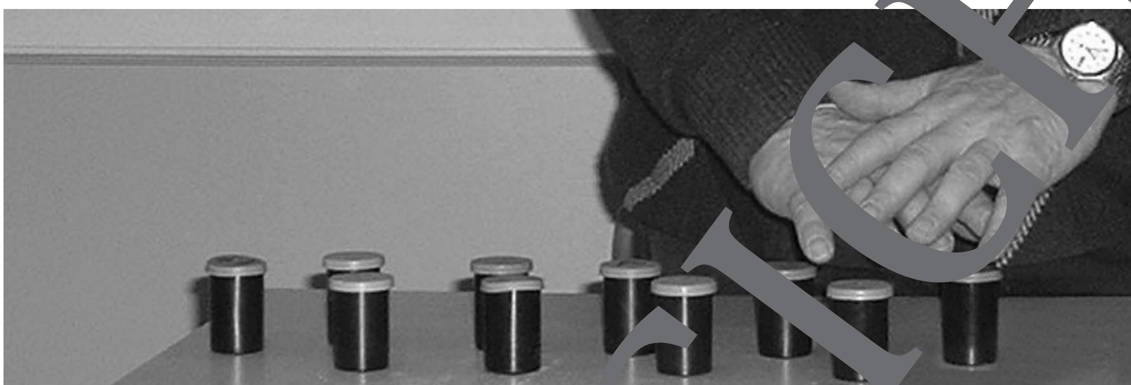


Foto: A. Warmeling

In welchem Döschen ist die Kreide?

Klasse: 12 ([illegible])

Dauer: [illegible]

Inhalt: Erfolgswahrscheinlichkeit; einseitiger Hypothesentest, speziell: Alternativtest; Fehler 1. und 2. Art; Irrtumswahrscheinlichkeit; Verwerfungsbereich

Ihr Plus:
- Handlungsorientierung
- Dynamische **Excel-Arbeitsblätter** zur Verdeutlichung des Prinzips
- Medikamententests als Anwendung

Geben Sie Ihren Schülern eine Hypothese an die Hand: „Ich kann Kreide nur mit der Aura meiner Hände in einem geschlossenen Behälter erspüren." Lassen Sie sie die experimentelle Überprüfung dieser These vorbereiten. Dabei entwickeln die Schüler Elemente des Alternativtests. Sie berechnen die Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. und 2. Art. Bei der Besprechung des Tests fassen Sie nur noch die einzelnen Schritte zusammen und erweitern das Verfahren zum einseitigen Hypothesentest. Als Anwendungen des Hypothesentests lernen die Schüler reale Medikamententests kennen.

Didaktisch-methodische Hinweise

Hypothesentests spielen in vielen Bereichen eine wichtige Rolle. Für den Wahlpflichtbereich der Oberstufe bietet es sich deshalb an, dieses interessante Thema aus der beurteilenden Statistik zu behandeln.

Tests zur Beurteilung paranormaler Fähigkeiten gehören nicht unbedingt zum alltäglichen Erfahrungsbereich der Schüler, erwecken aber im Zeitalter vieler Mystery-Serien zunächst einmal deren Neugier. Praktische Relevanz bekommen Hypothesentests allerdings dann, wenn man die zahlreichen Veröffentlichungen zu Medikamententests kritisch würdigt. Als Beispiele aus der letzten Zeit sind da die Diskussionen um Vioxx®, Trovan® oder auch Rigividerm® zu nennen.

Handlungsorientierung

Sie versetzen die Schüler in eine Situation, die sie sich vorstellen können und zu der sie auf der Basis ihrer bisher erworbenen mathematischen Kenntnisse Lösungsvorschläge entwickeln sollen. Die Schüler erarbeiten sich den Ablauf und die Fehlermöglichkeiten beim einseitigen Hypothesentest anhand dieses konkreten Beispiels selbst. Sie kennen das Verfahren vorher nicht. Dies meinen wir hier mit *handlungsorientierter Einführung*. Handlungsorientierung im Mathematikunterricht meint aber gleichzeitig auch, dass die Lernenden mathematische Werkzeuge an die Hand bekommen, um komplexe Situationen beurteilen zu können. Auch dies ist hier der Fall.

Alternativ- und Hypothesentests

Alternativtests sind mathematisch einfacher, weil zwei klar definierte Hypothesen gegeneinander abgewogen werden, z. B. H_0: p = 0,5 und H_1: p = 0,8. Sie haben aber keine praktische Relevanz – im Gegensatz zu den Hypothesentests, bei denen zwei komplementär zueinander formulierte Hypothesen alle Ausprägungen des untersuchten Parameters einschließen (z. B. $H_0: p \le 0{,}5$ und $H_1: p > 0{,}5$). Aber auch hier wird mit der Grenzausprägung (also z. B. p = 0,5) zur Bestimmung des Verwerfungsbereiches gearbeitet. Daher formulieren wir zunächst die Nullhypothese H_0 nur über diesen einen Wert. Die Verallgemeinerung auf die komplementäre Aussage zu H_1 folgt erst viel später.

Damit die Schüler strukturiert an Alternativ- und Hypothesentests herangehen können, haben wir die Vorbereitung in fünf Schritte unterteilt (siehe Lösungsseite 4). Hinzu kommen die Durchführung des Tests (Schritt 6) und die Entscheidung (Schritt 7). Die Entscheidungskriterien werden als Verwerfungsbereich angegeben, zusätzlich aber auch in der Entscheidungsregel formuliert.

Dynamische Excel-Arbeitsblätter

Die Arbeitsblätter, die in diesem Fall mit **Excel** realisiert sind, haben drei Funktionen. Zum Ersten stellen sie flexibel Binomialverteilungen zur Verfügung (***binom_einzeln.xls*** und ***binom_vtlg.xls***). Das ist wichtig, wenn Sie reale Beispiele behandeln wollen. Diese sind nur sehr selten mit den in den Schulbüchern vorgegebenen Tabellen zu bewältigen.

Zum Zweiten ermöglichen sie eine Visualisierung und damit ein besseres Verständnis dieser komplexen Thematik. Mithilfe der Excel-Arbeitsblätter können Sie dynamisch verdeutlichen, wie man vorgeht, um den Verwerfungsbereich zu einem Hypothesentest zu bestimmen, bzw., wo die Fehlerbereiche liegen (***bintest_beide.xls*** und ***binom_vtlg_fehler.xls***).

Zum Dritten verkürzen Sie z. B. mithilfe der Datei ***binom_vtlg_fehler.xls*** Ihre Unterrichtsvorbereitung. Nach Einstellen der Parameter erhalten Sie automatisch den Verwerfungsbereich angezeigt und können außerdem ß-Fehlerwahrscheinlichkeiten berechnen lassen.

Auf einen Blick

Material	Thema	Stunde
M 1	**Ultimativer Kreidetest geplant … – die Binomialverteilung** Die Schüler entwickeln selbst einen Test auf Basis der Bi mial-verteilung, um die aufgestellte Behauptung zu überprüfen.	3.
M 2	**Metall, Wasseradern und Gold – Parameter angebe** Kontext 1: Auswertung eines (rechtsseitigen) Te s auf para-normale Fähigkeiten Kontext 2: Auswertung eines weiteren (rechtsse en) Tests auf paranormale Fähigkeiten	4.
M 3	**Energetisiertes Wasser – eine Testlogik en ickeln** Durchführung eines kompletten link eitigen A ativtests, Berechnung von Fehlerwahrschei ichkeiten Einführung des links- bzw. rechts eitigen Hy othesent sts	5./6.
M 4	**Drei Binomialverteilungen – Fehle che mar eren** Veranschaulichung von Fe größen	7.
M 5	**Multiple Sklerose – Hypothesent t in der F schung** Durchführung eines) H thesentests auf der Basis konkreter Studie rgebnisse	8./9.

Excel-Arbeitsblätter

Die meisten auf der **CD-RO** iliegenden Exc l-Arbeitsblätter enthalten Schieberegler als dynamische Elemente. Da it di ktionieren, müssen Sie Folgendes beachten:

Für Excel 97–2003 stellen Sie u ter *xtras* → *Makros* → *Sicherheit* entweder **Mittel** oder **Niedrig** ein. Bei Mittel werden Sie ei jedem Start gefragt, ob Sie Makros aktivieren wollen, bei Niedrig wird d rausgesetz (Excel ab 2007 → siehe Erläuterungsteil)

Mate l	Thema
binom_einzeln.x	Hier kann man n und p dynamisch auswählen. Neben einer grafischen Darstellung der Verteilung gibt es Spalten für die el- und die aufsummierten Wahrscheinlichkeiten.
bi om_vtlg.xls	Dieses Werkzeug liefert mehrere Verteilungen zu einem n und verschiedenen Trefferwahrscheinlichkeiten p. Wie aus Büchern bekannt, werden nur die Nachkommastellen angegeben. Sie können damit Tabellen, z. B. für Klausuren, ausdrucken.
bi test_beide.xls	Hiermit kann sowohl für einen links- als auch für einen rechts-seitigen Hypothesentest die Ermittlung des Verwerfungs-bereichs visualisiert werden.
bino tlg_fehler.xls	Die Mappe enthält ein Arbeitsblatt, um Binomialverteilungen als Histogramm darzustellen. Das zweite Blatt visualisiert den α-Fehlerbereich, das dritte den zugehörigen ß-Fehlerbereich.

M 1 Ultimativer Kreidetest geplant … – die Binomialverteilung

Ausschnitt aus Woodcut from Georgius Agricolas „De re metallica libri XII", Basel 1556

Die Gesellschaft zur wissenschaftlichen Untersuchung von Parawissenschaften (GWUP) setzt sich für Aufklärung und kritisches Denken ein. Sie veranstaltete 2004 in Rossdorf wissenschaftliche Tests, mit denen z. B. Wünschelrutengänger ihre Fähigkeiten nachweisen sollten.

Die Probanden mussten mit ihrer Wünschelrute 13-mal einen Parcours mit 10 Eimern durchlaufen. Nur unter einem der Eimer war Wasser versteckt. Bisher konnte aber noch niemand den ausgelobten Preis von einer Million Dollar abholen.

Aufgabe

Auch ich, Ihr Lehrer, behaupte, paranormale Fähigkeiten zu besitzen.

Entwickeln Sie einen Test, um dies zu überprüfen.

Ich behaupte, dass ich mit einer Trefferquote von durchschnittlich 70 % vorhersagen kann, ob sich in einem schwarzen, nicht durchsichtigen Filmdöschen ein Stück Kreide befindet oder nicht. Dies gelingt mir nur mit der Aura meiner Hände, ich berühre das Filmdöschen nicht.

Ob Sie mir ein Filmdöschen hinstellen, das entweder mit einem Kreidestück gefüllt ist oder nicht, oder mehrere Dosen, von denen genau eine das Kreidestück enthält, ist mir egal. Aus organisatorischen Gründen darf die Zahl der Dosen allerdings 10 nicht überschreiten.

Tipps

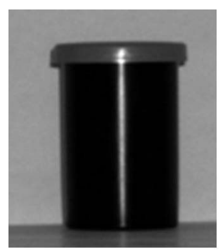


Foto: A. Warmeling

1. Sie sollten den Ablauf des Tests genau planen:
   – Wie viele Filmdosen werden benötigt?
   – Wie viele Testdurchgänge soll ich, Ihr Lehrer, machen?
   – Wie läuft der Test praktisch ab, wer übernimmt die Testleitung?
   – Wann habe ich den Test bestanden, wann nicht?

   Vor allem bei der letzten Frage erwarte ich eine mathematisch begründete Aussage.

   Ich sollte den Test möglichst nicht bestehen, wenn ich ein Blender bin, aber auf der anderen Seite auch gute Chancen haben, den Test zu bestehen, wenn meine Behauptung stimmt. Das sollten Sie mit geeigneten Wahrscheinlichkeiten belegen.
2. Wenn Sie Tabellen für bestimmte Binomialverteilungen brauchen, können Sie sich diese von Excel (***binom_einzeln.xls***) generieren lassen.

Machen Sie sich in Ihrer Gruppe gegenseitig so fit, dass jeder Schüler die Ergebnisse Ihrer Überlegungen vortragen kann.

IV/B

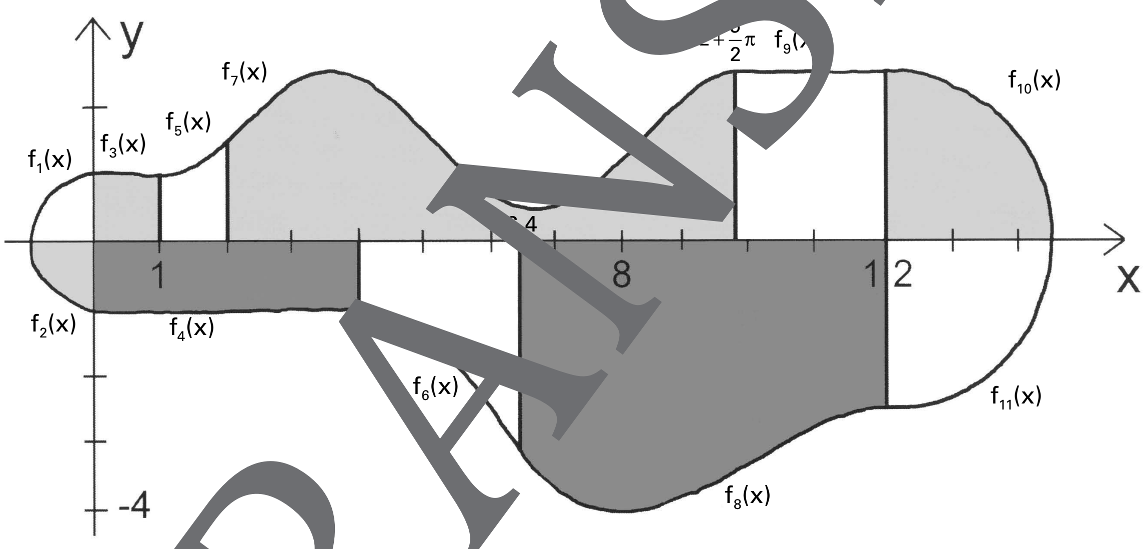
Die Formel 1 der Integralrechnung – Architektur einer Rennstrecke

Wolfgang Göbels, Bergisch Gladbach

Der Anderlandring

In Anderland soll eine Auto-Rennstrecke, genannt „Anderl[…]ndring“, gebaut werden. Gemäß dem Entwurf des Architekten besteht der Streckenplan [...]s Abschnitte[n ve]rschiedener Funktionsgraphen, die ineinander übergehen.

Die Abbildung zeigt die äußere Begrenzung des Str[…]nverlaufs, […]ettet in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 200 m), jedoch ohne g[…]ue Details. In der auf der nächsten Seite folgenden Tabelle sind die Abschni[…] der Funkt[…]sgraphen im Einzelnen definiert.



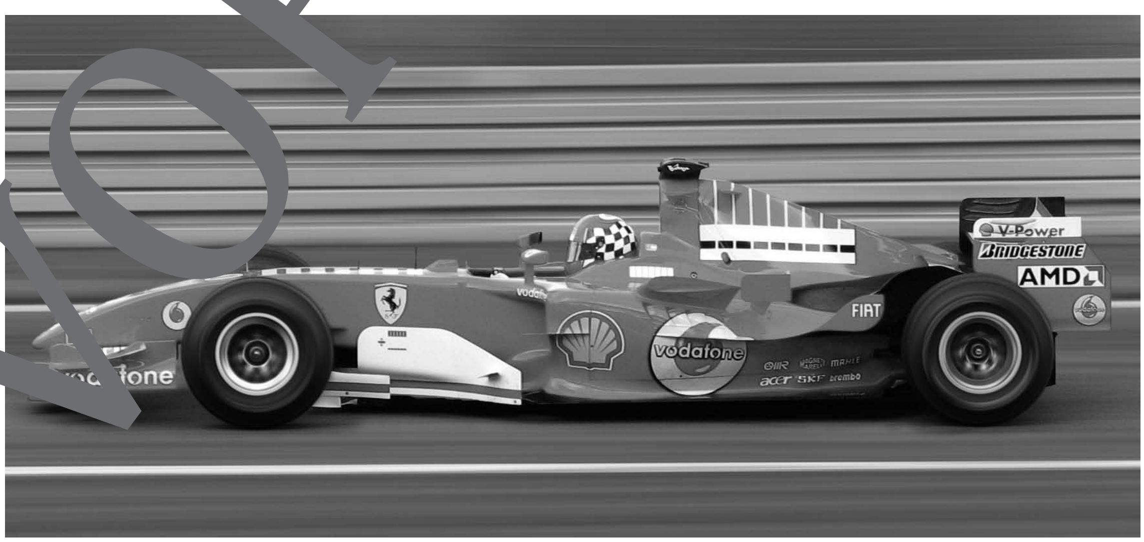


Foto: Pixelio

Formel 1-Rennwagen

Lösungen und ■ Tipps zum Einsatz

1. Ergibt an der Übergangsstelle zweier Funktionsgraphen ein Einsetzen des x-Wertes sowohl in die Funktionsgleichungen als auch in die ersten Ableitungen das jeweils identische Ergebnis, so gehen die Graphen an dieser Stelle ohne Knick ineinander über.

   Die Graphen von f_1 und f_2 bilden einen Halbkreis mit Mittelpunkt (0|0) und Radius 1 und die Graphen von f_{10} und f_{11} einen Halbkreis mit Mittelpunkt (12|0) und Radius 2,5. Damit gehen sie jeweils *ohne* Knick ineinander über.

■ Die Kettenregel für das Ableiten ist zu beachten!

1. Funktionsterm + Ableitung	2. Funktionsterm + Ableitung	x eingesetzt
$f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$	$f_3(x) = 1$	$f_1(0) = f_3(0) = 1$
$f_1'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$f_3'(x) = 0$	$f_1'(0) = f_3'(0) = 0$
$\Rightarrow$ f_1 und f_3 gehen bei x = 0 ohne Knick ineinander über.		
$f_3(x) = 1$	$f_5(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$	$f_3(1) = f_5(1) = 1$
$f_3'(x) = 0$	$f_5'(x) = x - 1$	$f_3'(1) = f_5'(1) = 0$
$\Rightarrow$ f_3 und f_5 gehen bei x = 1 ohne Knick ineinander über.		
$f_5(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$	$f_7(x) = \sin(x-2) + \frac{3}{2}$	$f_5(2) = f_7(2) = 1{,}5$
$f_5'(x) = x - 1$	$f_7'(x) = \cos(x-2)$	$f_5'(2) = f_7'(2) = 1$
$\Rightarrow$ f_5 und f_7 gehen bei x = 2 ohne Knick ineinander über.		
$f_7(x) = \sin(x-2) + \frac{3}{2}$	$f_9(x) = \frac{5}{2}$	$f_7(2+\frac{5}{2}\pi) = f_9(2+\frac{5}{2}\pi) = \frac{5}{2}$
$f_7'(x) = \cos(x-2)$	$f_9'(x) = 0$	$f_7'(2+\frac{5}{2}\pi) = f_9'(2+\frac{5}{2}\pi) = 0$
$\Rightarrow$ f_7 und f_9 gehen bei $x = 2+\frac{5}{2}\pi$ ohne Knick ineinander über.		
$f_9(x) = \frac{5}{2}$	$f_{10}(x) = \sqrt{\frac{25}{4} - (x-12)^2}$	$f_9(12) = f_{10}(12) = 2{,}5$
$f_9'(x) = 0$	$f_{10}'(x) = \frac{12-x}{\sqrt{\frac{25}{4} - (x-12)^2}}$	$f_9'(12) = f_{10}'(12) = 0$
$\Rightarrow$ f_9 und f_{10} gehen bei x = 12 ohne Knick ineinander über.		

Jede Sekunde zählt! – Den optimalen Weg einer Rettungsschwimmerin bestimmen

Anja Köhne, Wiesbaden

M 1 Hilfe! – Den optimalen Weg von Florence schätzen

Die Rettungsschwimmerin Florence überwacht aufmerksam vom Punkt F(0|0) aus ihren Strandabschnitt, als plötzlich Ralf um Hilfe schreit. Ralf befindet sich am Ort R(10|5). Florence eilt ihm sofort zu Hilfe.

Dabei erreicht sie am Strand (d.h. wenn sie entlang oder unterhalb der x-Achse läuft) eine Geschwindigkeit von 4 m/s, während sie im Wasser (d.h. wenn sie oberhalb der x-Achse schwimmt) nur mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s vorankommt.

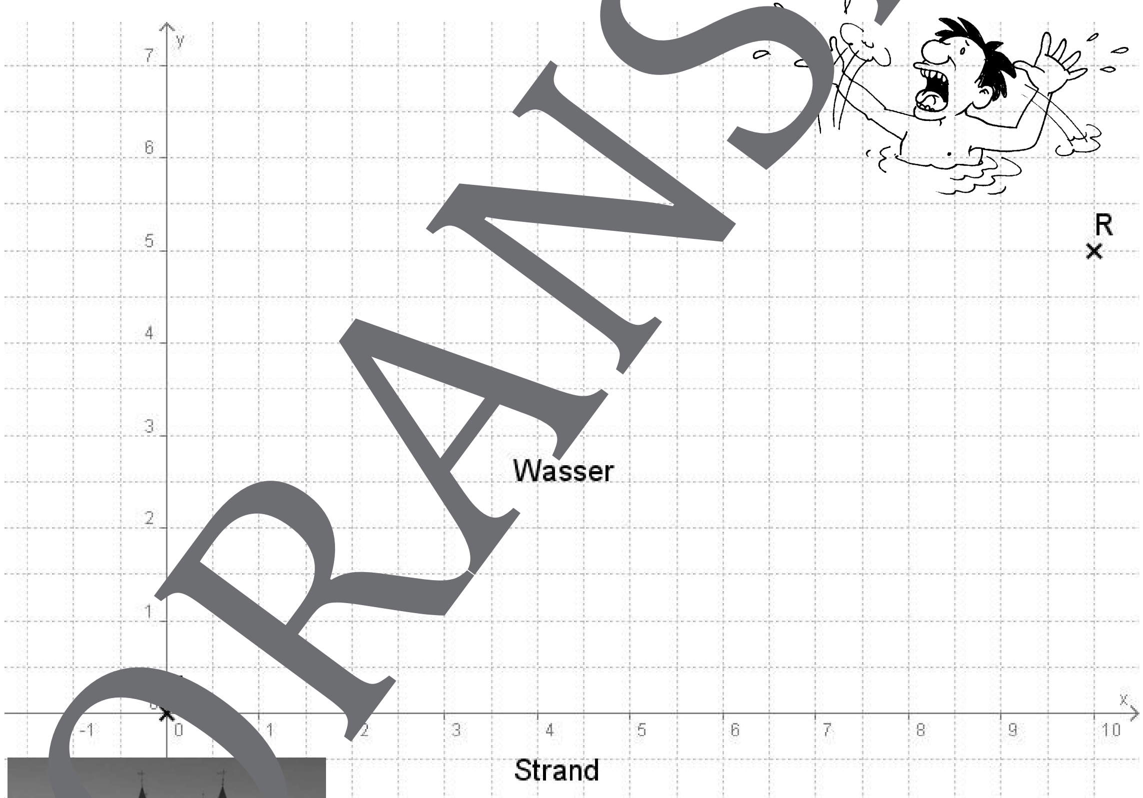



Foto: picture-alliance/ZB

Aufgabe

a) Welchen Weg soll Florence wählen, um möglichst schnell bei Ralf zu sein?

b) In welchem Punkt (x|0) soll sie dazu ins Wasser gehen (die x-Achse verlassen)?

c) Geben Sie eine Schätzung ab und zeichnen Sie diesen Weg in das Koordinatensystem ein.

Die Rettungsschwimmerin Florence

M 4 Rettet Ralf! – Das Brechungsgesetz bestätigen

Auf den vorherigen Materialien haben Sie eine Funktion t(x) für die Dauer des Weges von F nach R aufgestellt. Für welches x ist t(x) minimal?

Aufgabe 1: Den Extremwert der Zeitfunktion bestimmen

a) Bestimmen Sie die 1. Ableitung der Funktion t(x).

b) Was ergibt sich für t′(x) = 0?

Tipp p-q-Formel anwenden $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

c) Bestimmen Sie den Tiefpunkt der Funktion t.

d) Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Foto: Pixelio

Im Geschrei der Möwen sind Ralfs Hilferufe beinahe untergegangen.

Aufgabe 2: Florence startet vom Stützpunkt der Rettungswacht im Punkt P(0|-5)

Foto: Pixelio

Stützpunkt des DLRG

a) Stellen Sie eine Funktion d(x) auf für die Dauer des Weges von P nach R(10|5), wenn Florence vom Punkt P(0|-5) aus startet. Bestimmen Sie die erste Ableitung von d und ermitteln Sie den Tiefpunkt der Funktion.

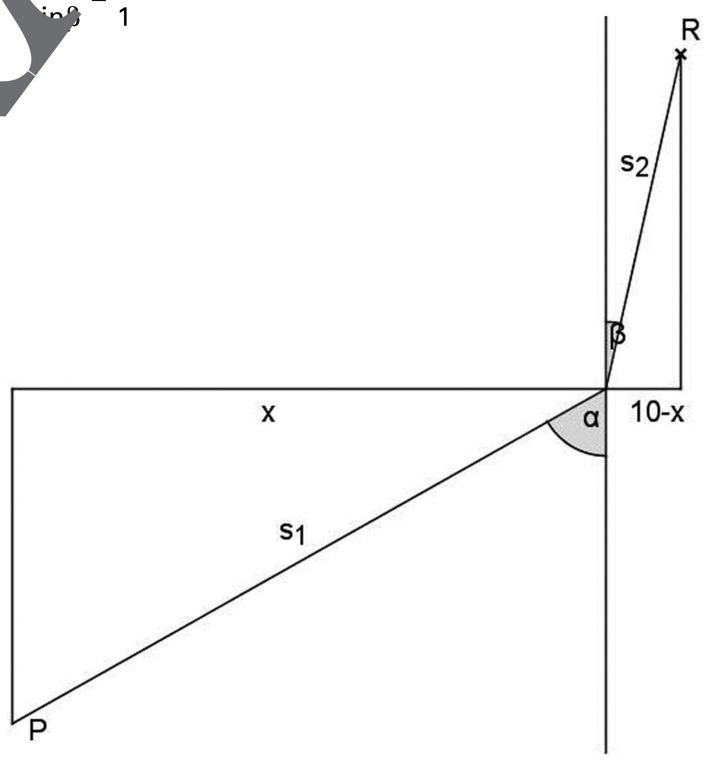
Tipp Berechnen Sie die Nullstelle der ersten Ableitung von d(x) mithilfe des Newton-Verfahrens.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{d'(x_n)}{d''(x_n)}$$

b) Weisen Sie nach, dass beim optimalen Weg von Florence die Winkel α und β (d.h. die Winkel zum Lot auf den Schnittpunkt S mit der x-Achse) das Brechungsgesetz erfüllen, welches besagt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{4}{1}$$

Auch das Licht bahnt sich den optimalen Weg (Fermat'sches Prinzip)! Vgl. hierzu: Richard P. Feynman: QED. Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie (Taschenbuch)



Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Postfach 103922, D - 70034 Stuttgart
Telefon: 0711/62900-0, Fax: 0711/62900-60
E-Mail: schule@raabe.de
Internet: www.raabe.de

Die Deutsche Bibliothek – [illegible]P-Einheit[illegible]ahme

Ein Titelsatz für diese Publikation is[illegible] bei der Deutschen B[illegible]liothek erhältlich

Printed in Germany

Projektmanagement:	Anna-Gr[illegible]a Wittne[illegible]
Redaktion:	Anna-Gre[illegible] Witt[illegible]ebel
Redaktionelle Mitarbeit:	Judith Bing[illegible]nush Khachatryan
Grafik:	[illegible] Lenzmann, [illegible] Oser, A. Fröhlich, M. Krämer, Ch. Grundmann, T. Köttgen
Umschlaggestaltun[illegible]	[illegible]M Mungena[illegible] [illegible]ektmarketing GmbH
	H[illegible]ergrundphot[illegible]raphie: Fluggerät (Leonardo da Vinci) © Phaidon Press Ltd.
	Ei[illegible] Carl Friedrich Gauß © AKG Berlin
Satz:	T[illegible]aglia, Dettenheim

ISSN 0946 5251
ISBN 97[illegible]024.1

Für [illegible]des Material w[illegible]en Rechte nachgefragt. Sollten dennoch an einzelnen Materialien weitere Rechte best[illegible]en, bitten wir um [illegible]enachrichtigung.

[illegible]edruck[illegible] chlorfrei ge[illegible]leichtem Papier

RAABE
Stuttgart

Bratislava Budapest Prag Sofia